

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECANICA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS
BIDIMENSIONAIS DE CONVECÇÃO NATURAL
EM CAVIDADES ARBITRÁRIAS**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

FERNANDO EDUARDO MILIOLI

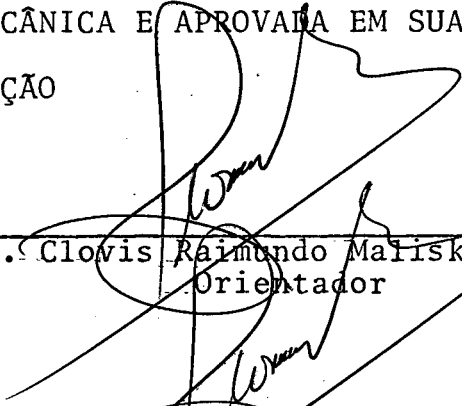
FLORIANÓPOLIS, ABRIL - 1985

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS
BIDIMENSIONAIS DE CONVECÇÃO NATURAL
EM CAVIDADES ARBITRÁRIAS**

FERNANDO EDUARDO MILIOLI

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA

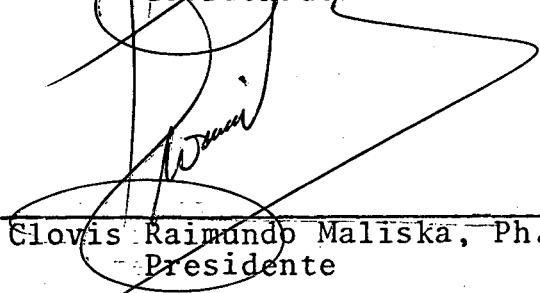
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



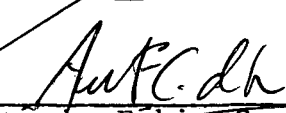
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.
Orientador

Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.
Coordenador

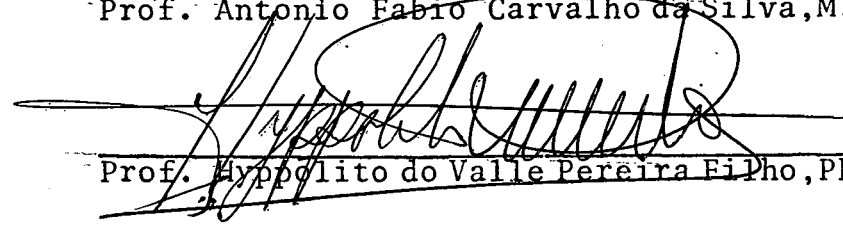
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.
Presidente



Prof. Antonio Fabio Carvalho da Silva, M.Sc.



Prof. Hippolito do Valle Pereira Filho, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

Desejo manifestar minha sincera gratidão a todos aqueles que, das mais variadas formas, colaboraram para o desenvolvimento e execução desta Dissertação. Expresso agradecimentos especiais ao Professor Clovis Raimundo Maliska, pelos conhecimentos transmitidos e pela orientação efetiva.

Agradeço igualmente à Comissão Nacional de Energia Nuclear - CNEN, cujo apoio financeiro foi fundamental para a continuidade dos trabalhos.

ÍNDICE

	Página
LISTA DE TABELAS	ix
LISTA DE FIGURAS	xi
SIMBOLOGIA	xvii
RESUMO	xxii
ABSTRACT	xxiii
CAPÍTULOS	
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - GERAÇÃO DE UM SISTEMA NATURAL DE COORDENADAS	9
2.1 - Introdução	9
2.2 - Transformação do Sistema de Coordenadas	10
2.3 - Geração do Sistema de Coordenadas (ξ, η)	11
2.4 - Controle de Espaçamentos	16
2.5 - Solução Numérica do Sistema de Equações de Ge- ração	17
2.6 - Conclusões e Sumário	18
3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	19
3.1 - Introdução	19
3.2 - Formulação do Problema	19
3.3 - Equações Governantes no Sistema Cartesiano de Coordenadas	20
3.4 - Aproximação de Boussinesq	22
3.5 - Validade da Aproximação de Boussinesq	26
3.6 - Conclusões e Sumário	27

	Página
4 - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES GOVERNANTES	28
4.1 - Introdução	28
4.2 - Variáveis Dependentes para as Equações de Conservação da Quantidade de Movimento	28
4.3 - Equações Transformadas	31
4.4 - Conclusões e Sumário	33
5 - EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO TRANSFORMADO	35
5.1 - Introdução	35
5.2 - Arranjo de Grade	35
5.3 - Equações em Diferenças Finitas no Plano Transformado	37
5.4 - Conclusões e Sumário	46
6 - ALGORITMO DE SOLUÇÃO	48
6.1 - Introdução	48
6.2 - Formulação U-V	48
6.3 - Formulação Incompressível	51
6.4 - Procedimento para a Manipulação do Acoplamento Pressão-Velocidade nas Equações de Movimento ...	52
6.5 - Procedimento para a Solução da Série de Equações Usando o Método PRIME	54
6.6 - Obtenção da Equação de Poisson para a Pressão ..	55
6.7 - Condições de Contorno para Velocidades no Domínio Transformado	59
6.8 - Pontos Fictícios para Temperatura e Pressão	61
6.9 - Avaliação do Gradiente de Pressão para Volumes de Controle de Velocidade Localizados nas Fronteiras	64

	Página
6.10 - Alguns Detalhes Numéricos	65
6.11 - Conclusões e Sumário	69
7 - RESULTADOS OBTIDOS	71
7.1 - Introdução	71
7.2 - Teste Hidrodinâmico	72
7.3 - Resultados para o Problema da Convecção Natural em uma Cavidade Quadrada	75
7.4 - Resultados para uma Cavidade Anular	95
7.5 - Resultados para uma Cavidade Irregular	102
7.6 - Conclusões e Sumário	119
8 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	120
8.1 - Sumário	120
8.2 - Contribuições desta Dissertação	122
8.3 - Sugestões para Futuros Trabalhos	122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125
APÊNDICES	
A - COVARIÂNCIA E CONTRAVARIÂNCIA. MÉTRICAS DA TRANSFOR- MAÇÃO DE COORDENADAS	128
A.1 - Introdução	128
A.2 - Componentes Covariantes e Contravariantes de um Vetor	128
A.3 - Transformação do Sistema Cartesiano para o Sis- tema Generalizado de Coordenadas	131
A.4 - Determinação do Tensor Métrico g_{ij}	131

	Página
A.5 - Velocidades Contravariantes sem Normalização Métrica	133
A.6 - Comprimentos e Áreas no Plano Transformado	134
A.7 - Sumário	135
B - EQUAÇÕES DE GERAÇÃO DE MALHAS NO PLANO TRANSFORMADO ..	136
B.1 - Introdução	136
B.2 - Derivadas de Primeira e Segunda Ordens da Função $f(\xi, \eta)$ em Relação a x e y	136
B.3 - Derivadas de Primeira e Segunda Ordens de ξ e η em Relação a x e y	137
B.4 - Equações de Geração de Malhas no Domínio Transformado	138
B.5 - Equações Transformadas em Diferenças Finitas ...	140
B.6 - Sumário	142
C - O FENÔMENO DA CONVECÇÃO NATURAL	143
C.1 - Introdução	143
C.2 - Condição de Ocorrência de Convecção Natural	143
C.3 - Equações de Conservação para a Convecção Natural	145
C.4 - Obtenção da Força de Flutuação Usando Série de Taylor	147
C.5 - Conclusões e Sumário	148
D - COEFICIENTES PARA A EQUAÇÃO DE PRESSÃO PARA VOLUMES DE CONTROLE DE CONTINUIDADE NA FRONTEIRA	150
D.1 - Introdução	150
D.2 - Listagem dos Coeficientes e Termos Fonte	150
D.3 - Sumário	154

E - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE ENERGIA	155
E.1 - Introdução	155
E.2 - Equações Adicionais	156
E.3 - Gradientes de Temperatura nas Paredes	158
E.4 - Sumário	159

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 3.1 - Grandezas P^ϕ , S^ϕ e r^ϕ para as equações governantes	22
Tabela 4.1 - Termos fonte e de pressão para as equações de conservação transformadas	32
Tabela 7.1 - Perfis de velocidades nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 7.2 para $Re = 100$	74
Tabela 7.2 - Perfis de velocidades nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 7.2 para $Re = 400$	74
Tabela 7.3 - Velocidades máximas nas linhas médias da cavidade quadrada e números de Nusselt máximos, mínimos e médios na fronteira esquerda. Resultados para malha ortogonal e $Pr = 0,71$. Comparação com [17]	81
Tabela 7.4 - Perfis de velocidades u^* e v^* e temperatura T^* na seção AA da Figura 7.18 para $Pr = 0,71$ e $Ra = 10^3$, 5×10^3 , 10^4 , 5×10^4 e 10^5	100
Tabela 7.5 - Coeficientes globais de condutibilidade térmica equivalente na fronteira σ_2 da Figura 7.18, para $Pr = 0,71$. Em [14], $Pr = 0,708$...	101
Tabela 7.6 - Números de Nusselt médios ao longo da fronteira para $Ra = 10^3$, 10^4 , 10^5 e 10^6 . $Pr = 0,71$	105
Tabela 7.7 - T^* nos pontos de temperatura na seção GG da Figura 7.21, para $Ra = 10^3$, 10^4 , 10^5 e 10^6 (sentido da esquerda para a direita). $Pr = 0,71$	116

Tabela 7.8 - v^* nos pontos de velocidade na seção AA da
 Figura 7.21, para $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6
 (sentido da esquerda para a direita). $Pr =$
 0,71 117

Tabela 7.9 - u^* nos pontos de velocidade na seção DD da
 Figura 7.21, para $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6
 (sentido do topo para a base). $Pr = 0,71$ 118

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 2.1 - Domínio de fronteiras arbitrárias no plano físico	10
Figura 2.2 - Domínio de fronteiras arbitrárias no plano transformado	11
Figura 2.3 - Sistema natural de coordenadas	13
Figura 2.4 - Plano transformado (ξ, η)	14
Figura 2.5 - Exemplo de um sistema natural de coordenadas não-ortogonal para um domínio duplamente conexo	15
Figura 2.6 - Exemplo de um sistema de coordenadas não-ortogonal para uma região simplesmente conexa	16
Figura 2.7 - Exemplo de sistema natural de coordenadas não-ortogonal para uma região simplesmente conexa	18
Figura 3.1 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar em cavidades arbitrárias	20
Figura 3.2 - Domínio arbitrário com fronteiras desproporcionais	25
Figura 4.1 - Componentes cartesianas, covariantes e contravariantes do vetor velocidade \vec{V}	29
Figura 4.2 - Velocidades contravariantes sem normalização métrica	30
Figura 5.1 - Arranjo de grade utilizado	37

Figura 5.2 - Volume de controle elementar no plano transformado	38
Figura 6.1 - Volume de controle para a continuidade e componentes contravariantes do vetor velocidade	50
Figura 6.2 - Determinação das componentes contravariantes não exigidas para satisfazer a restrição da continuidade	55
Figura 6.3 - Arranjo de grade: (a) - Patel & Briggs; (b) - Assumido neste trabalho	59
Figura 6.4 - Aplicação das condições de contorno para velocidades em domínios simplesmente conexos ..	60
Figura 6.5 - Volume de controle para U junto à fronteira. Cálculo de $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ na parede	63
Figura 6.6 - Perfil de pressão assumido para o cálculo de gradientes de pressão nas fronteiras	65
Figura 7.1 - Características geométricas e condições de contorno para o problema de fluxo hidrodinâmico em cavidade quadrada com parede inferior móvel	73
Figura 7.2 - Malha não-ortogonal 5 x 5	75
Figura 7.3 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar em cavidade quadrada	77
Figura 7.4 - Malha ortogonal não uniforme 26 x 26. Quadrante inferior esquerdo. Demais quadrantes simétricos	78

Figura 7.5	- Malha não-ortogonal 26 x 26. Quadrante inferior esquerdo. Demais quadrantes simétricos ..	79
Figura 7.6	- Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas média horizontal, AA e BB para a cavidade quadrada. $Ra = 10^3$; $Pr = 0,71$	85
Figura 7.7	- Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas média horizontal, AA e BB para a cavidade quadrada. $Ra = 10^4$; $Pr = 0,71$	86
Figura 7.8	- Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas média horizontal, AA e BB para a cavidade quadrada. $Ra = 10^5$; $Pr = 0,71$	87
Figura 7.9	- Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas média horizontal e AA para a cavidade quadrada. $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$	88
Figura 7.10	- Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas média vertical, CC e DD para a cavidade quadrada. $Ra = 10^3$; $Pr = 0,71$	89
Figura 7.11	- Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas média vertical, CC e DD para a cavidade quadrada. $Ra = 10^4$; $Pr = 0,71$	90
Figura 7.12	- Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas média vertical, CC e DD para a cavidade quadrada. $Ra = 10^5$; $Pr = 0,71$	91
Figura 7.13	- Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas média vertical e CC para a cavidade quadrada. $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$	92
Figura 7.14	- Perfis de temperatura na linha média horizontal para a cavidade quadrada usando as malhas ortogonal e não-ortogonal. $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 ; $Pr = 0,71$	93

- Figura 7.15 - Perfis de número de Nusselt ao longo da fronteira esquerda da cavidade quadrada para as malhas ortogonal e não-ortogonal. $Pr = 0,71$.
(a) - $Ra = 10^3$ e 10^4 ; (b) - $Ra = 10^5$ e 10^6 ... 94
- Figura 7.16 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar entre tubos isotérmicos concêntricos 96
- Figura 7.17 - Características geométricas e condições de contorno para o problema simétrico da convecção natural laminar entre tubos isotérmicos concêntricos 97
- Figura 7.18 - Malha não-ortogonal 9×16 para o problema da convecção natural entre tubos concêntricos, com as fronteiras de simetria σ_3 e σ_4 .. 99
- Figura 7.19 - Perfis de K_{eq} ao longo da fronteira direita para a cavidade da Figura 7.17 101
- Figura 7.20 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar em cavidade irregular 103
- Figura 7.21 - Malha não-ortogonal 26×26 para a cavidade irregular 104
- Figura 7.22 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas AA, BB e CC da Figura 7.21. $Ra = 10^3$; $Pr = 0,71$ 106
- Figura 7.23 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas AA, BB e CC da Figura 7.21. $Ra = 10^4$; $Pr = 0,71$ 107

Figura 7.24 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas AA e CC da Figura 7.21. $Ra = 10^5$; $Pr = 0,71$...	108
Figura 7.25 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas AA e CC da Figura 7.21. $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$...	109
Figura 7.26 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas DD, EE e FF da Figura 7.21. $Ra = 10^3$; $Pr = 0,71$	110
Figura 7.27 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas DD, EE e FF da Figura 7.21. $Ra = 10^4$; $Pr = 0,71$	111
Figura 7.28 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas DD e FF da Figura 7.21. $Ra = 10^5$; $Pr = 0,71$...	112
Figura 7.29 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas DD e FF da Figura 7.21. $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$...	113
Figura 7.30 - Perfis de temperatura ao longo da linha GG da Figura 7.21. $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 ; $Pr = 0,71$	114
Figura 7.31 - Perfis de número de Nusselt ao longo da fronteira σ_1 da cavidade irregular. $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 ; $Pr = 0,71$	115
Figura A.1 - Entidades covariantes e contravariantes associadas ao vetor \vec{V} e ao sistema generalizado de coordenadas (ξ, η)	130
Figura A.2 - Componentes contravariantes de \vec{V} sem normalização métrica, U e V; e comprimentos no domínio físico	134
Figura B.1 - Domínio transformado	140

Página

Figura D.1 - Os 9 tipos de volume de controle para a continuidade	151
Figura E.1 - Cálculos de $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ na fronteira superior e $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ na fronteira esquerda	158

SIMBOLOGIA

x, y - Sistema cartesiano de coordenadas.

J - Jacobiano da transformação definida pelas Equações (2.1) e (2.2).

P, Q - Termos fonte das Equações (2.9) e (2.10) de geração de malha.

a, b, c, d - Coeficientes nas Equações (2.18) e (2.19) para P e Q .

g_{ij} - Componentes do tensor métrico da transformação definidas pelas Equações (2.15) a (2.17).

$d\vec{S}$ - Área elementar no plano físico.

q, E, F, R, S - Grandezas definidas na Equação (3.1).

$\hat{E}, \hat{F}, \hat{R}, \hat{S}$ - Grandezas definidas nas Equações (4.1) e (4.5).

S^ϕ - Termo fonte na equação de conservação para ϕ .

\hat{S}^ϕ - Termo fonte transformado na equação de transformação para ϕ .

$L[\]$ - Aproximação em diferenças finitas da quantidade entre colchetes.

T - Temperatura.

\bar{T} - Temperatura de referência.

T' - Flutuação na temperatura.

P - Pressão.

- \bar{P} - Pressão de referência.
- P' - Flutuação na pressão.
- ΔP_w - Gradiente de pressão nas paredes.
- \vec{V} - Vetor velocidade.
- u, v - Componentes de velocidade no sistema cartesiano.
- U, V - Componentes contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica.
- V^i - Componentes contravariantes do vetor velocidade.
- V_i - Componentes covariantes do vetor velocidade.
- \hat{U}, \hat{V} - Velocidades definidas pelas Equações (6.7) e (6.8).
- T^* - Temperatura adimensional.
- u^*, v^* - Velocidades cartesianas adimensionais.
- x^*, y^* - Coordenadas cartesianas adimensionais.
- C_1, C_2, C_4, C_5 - Coeficientes de difusão transformados. Equações (4.9) a (4.11).
- t - Tempo na Equação (5.3).
- Δt - Intervalo de tempo na Equação (5.3).
- E - Avanço de tempo. Equação (5.34).
- e, w, n, s - Indicadores das faces leste, oeste, norte e sul para volumes de controle.
- P - Indicador de volume de controle.

E,W,N,S,NE,

NW,SE,SW - Indicador de volumes de controle vizinhos ao elemento P.

A_e^ϕ, A_w^ϕ , etc. - Coeficientes na equação em diferenças finitas para ϕ .

M_e, D_e - Parcelas convectivas e difusivas presentes nos coeficientes acima.

ΔV - Volume de um elemento de controle.

B - Termo fonte na equação para pressão.

K - Coeficiente de condutibilidade térmica.

c_p - Calor específico à pressão constante.

v - Volume específico.

s - Entropia.

\vec{g} - Aceleração da gravidade.

D_h - Diâmetro hidráulico. Equação (7.9).

q - Fluxo de calor por condução.

K_{eq} - Coeficiente de condutibilidade térmica equivalente. Equação (7.7).

\bar{K}_{eq} - Coeficiente global de condutibilidade térmica equivalente. Equação (7.8).

Nu - Número de Nusselt. Equação (7.4).

Nu_o - Número de Nusselt médio. Equação (7.5).

Pr - Número de Prandtl.

- Ra - Número de Rayleigh. Figura 7.3.
- re - Número de Peclet de malha. Equação (5.14).
- Re - Número de Reynolds. Figura 7.1.
- α, β, γ - Componentes do tensor métrico. Equações (2.15) a (2.17).
- $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ - Coeficientes para os perfis convectivos e difusivos. Equações (5.15) e (5.16).
- α_T - Coeficiente de difusividade térmica.
- $\bar{\beta}$ - Coeficiente de expansão térmica.
- ϵ - Tolerância para critérios de convergência.
- ξ, η - Sistema generalizado de coordenadas. Domínio transformado.
- μ - Viscosidade absoluta.
- ν - Viscosidade cinemática.
- ρ - Massa específica.
- $\bar{\rho}$ - Massa específica de referência.
- ρ' - Flutuação na massa específica.
- σ - Fronteiras no domínio físico. Figura 2.3.
- σ^* - Fronteiras no domínio transformado. Figura 2.4.
- ϕ - Campo escalar genérico.
- Γ^ϕ - Coeficiente de transporte difusivo para um escalar ϕ .

SUBSCRITOS

x, y, ξ, η - Referem-se a derivadas parciais de primeira ordem.

$xx, yy, \xi\xi, \eta\eta$ - Referem-se a derivadas parciais de segunda ordem.

$P, E, N, S, W,$
 NE, SE, NW, SW - Referem-se aos pontos onde as variáveis são avaliadas.

SUPERSCRITOS

$\bar{}$ - Indica estado de referência.

\prime - Indica flutuações nas propriedades.

$*$ - Refere-se a valores adimensionais.

$\hat{}$ - Refere-se a quantidades transformadas, exceto para velocidades.

n - Refere-se ao nível de iteração nas equações em diferenças finitas.

$n+\theta$ - Refere-se a quantidades avaliadas no tempo $t+\theta\Delta t$.

RESUMO

Este trabalho visa a obtenção da solução numérica para o problema da convecção natural laminar em cavidades bidimensionais fechadas com fronteiras arbitrárias. O fenômeno da convecção natural é consequência da ação de forças de flutuação, as quais são modeladas de acordo com a aproximação de Boussinesq.

As equações de conservação que governam o problema são resolvidas sobre sistemas de coordenadas não-ortogonais adaptados às fronteiras das cavidades. As malhas não-ortogonais são geradas a partir da solução de um sistema adequado de equações elípticas.

As equações da continuidade e de conservação da quantidade de movimento são transformadas do sistema cartesiano para o curvilíneo generalizado mantendo as velocidades cartesianas como variáveis dependentes. Em seguida, são aproximadas em diferenças finitas e modificadas para conter as velocidades normais às linhas coordenadas. O trabalho de computação é executado no plano transformado, e do esquema numérico desenvolvido participam tanto as velocidades cartesianas quanto as contravariantes. As variáveis dependentes das equações de conservação são localizadas convenientemente sobre os pontos de grade de maneira desencontrada.

O esquema numérico é testado resolvendo-se o problema hidrodinâmico laminar de fluxo em cavidade quadrada com um lado móvel, empregando grade não-ortogonal. Em etapa posterior resolve-se o problema da convecção natural laminar em uma cavidade quadrada usando sistemas de coordenadas ortogonal e não-ortogonal. Obtém-se também a solução para o problema da convecção natural laminar em torno de um tubo quadrado envolvido concentricamente por um cilindro circular, usando grade não-ortogonal.

Finalmente, com o objetivo de demonstrar a generalidade do método, resolve-se o problema da convecção natural laminar para uma cavidade de fronteiras completamente irregulares.

ABSTRACT

In this research work a numerical model for the solution of two-dimensional natural convection problems in arbitrary cavities of a Boussinesq fluid is presented.

The conservation equations are written in a general curvilinear coordinate system which matches the irregular boundaries of the domain. The nonorthogonal system is generated by a suitable system of elliptic equations.

The momentum and continuity equations are transformed from the Cartesian system to the general curvilinear system keeping the Cartesian velocity components as the dependent variables in the transformed domain. Finite difference equations are obtained for the contravariant velocity components in the transformed domain. The numerical calculations are performed in a fixed rectangular domain and both the Cartesian and the contravariant velocity components take part in the solution procedure. The dependent variables are arranged on the grid in a staggered manner.

The numerical model is tested by solving the driven flow in a square cavity with a moving side using a nonorthogonal grid. The natural convection in a square cavity, using an orthogonal and a nonorthogonal grid, is also solved for the model test. Also, the solution for the buoyancy flow between a square cylinder placed inside a circular cylinder is presented. The results of the test problems are compared with those available in the specialized literature.

Finally, in order to show the generality of the model, the natural convection problem inside a very irregular cavity is presented.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - GENERALIDADES

A solução do problema da convecção natural laminar em espaços confinados é objeto de grande interesse no campo da engenharia. Alguns exemplos dessa aplicação são: janelas com vidro duplo, onde o espaço confinado visa a minimização dos fluxos térmicos; ventilação de ambientes fechados, onde o controle térmico e de movimentação de ar são fundamentais; coletores de energia solar, em cujo espaço entre tubulações e cobertura de vidro fica caracterizada a ação da convecção natural; isolamento de reatores nucleares por cavidades contendo gases; isolamento de cabines de aeronaves de altas velocidades; resfriamento de recipientes de lixo radiativo; resfriamento de componentes eletrônicos, etc. Nesse contexto, o tratamento das cavidades irregulares assume grande importância, visto que questões como eficácia de trocas térmicas ou mesmo limitações físicas e técnicas de projeto impõe, por vezes, as mais variadas geometrias a estas cavidades. Nesse sentido, a disposição e formas das tubulações de um coletor solar torna-se ótimo exemplo, pois a cavidade onde se desenvolve a convecção natural assume um caráter geométrico bastante irregular. Todas as aplicações de engenharia acima referidas podem ser abordadas através do presente desenvolvimento, desde que a estas se possa conferir um tratamento bidimensional.

Esta classe de problemas exige, para sua solução, a resolução simultânea de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares acopladas. A complexidade matemática desse sistema limita a possibilidade de soluções analíticas, tornando obrigatório a utilização de métodos numéricos.

Na solução de qualquer problema de contorno, é conveniente utilizar-se sistemas de coordenadas cujas linhas se adaptem às fronteiras do domínio em questão. Essa medida simplifica a aplicação das condições de contorno, pois estas ficam especificadas exa-

tamente sobre pontos discretos definidos nas linhas coordenadas de fronteira. Se isso não ocorre, torna-se necessário fazer-se interpolações para que se possa aplicar as condições de contorno. Tal procedimento implica na introdução de imprecisões nos cálculos, pois aproximações são feitas exatamente sobre o fator determinante de todo o desenvolvimento no domínio.

Para o caso de uma cavidade retangular, o sistema cartesiano é adequado; para um problema com fronteiras circulares, um sistema cilíndrico é conveniente; para domínios irregulares utiliza-se sistemas naturais de coordenadas, as quais adaptam-se perfeitamente às fronteiras do domínio arbitrário.

O sistema natural de coordenadas curvilíneas generalizadas usado é do tipo não-ortogonal, e é obtido pela solução de um sistema de equações de Poisson. A hipótese do uso de sistemas ortogonais é afastada devido à necessidade de consideração de condições de contorno mistas para a solução das equações de Poisson geradas do sistema, uma vez que teriam que ser satisfeitas as condições de ortogonalidade de Cauchy-Riemann, o que exigiria um procedimento numérico mais complexo e de maior custo operacional. Além disso, um método de solução generalizado torna-se possível utilizando-se um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas como referencial.

O uso de sistemas não-ortogonais tem a desvantagem de que as equações de conservação tornam-se mais complexas devido à presença dos termos não-ortogonais. Esses termos dão origem à equações em diferenças finitas para problemas bidimensionais envolvendo 9 pontos discretos, em contraposição aos 5 pontos que em geral se tem para malhas ortogonais. A geração de um sistema não-ortogonal é, entretanto, bastante simples. Além do que, existem vários métodos eficientes para a modelagem das equações de conservação nesses sistemas, e um deles, devido a Maliska [1], é aqui utilizado. Sua performance é comparável àquelas para os esquemas de modelagem ortogonal existentes, destacando-se ainda o fato de que, quando a grade empregada é ortogonal, o esquema numérico recai exatamente no esquema padrão para grades ortogonais; envolvendo 5 pontos. Estes detalhes garantem antecipadamente a aplicação bem sucedida dos sistemas não ortogonais.

As equações que governam o problema da convecção natural são

primeiramente apresentadas para o sistema cartesiano de coordenadas, sendo posteriormente transformadas para o sistema generalizado, onde são resolvidas. É importante observar que quando a geometria do problema é modificada, deve-se apenas gerar um novo sistema de coordenadas que se adapte a ela, não havendo qualquer modificação a ser introduzida no restante do modelo de solução.

O objetivo presente é a solução do problema da convecção natural laminar em cavidades irregulares. Nesse intuito, todas as questões mencionadas acima são levantadas e consideradas nas etapas de formulação, desenvolvimento e resolução do problema. O trabalho apresenta-se bastante facilitado graças a disponibilidade de um modelo hidrodinâmico desenvolvido para fluxos forçados em dutos arbitrários, construído justamente a partir do questionamento dos fatos acima colocados. Esse modelo, que é tridimensional, é aqui simplificado para o caso bidimensional, e a ele são acrescidos a equação de conservação de energia e os termos de forças flutuantes que dominam o fenômeno da convecção natural. Alterado e suplementado dessa forma, o modelo resultante torna-se apto a tratar dos fenômenos da convecção natural laminar em cavidades. No campo específico e pouco explorado das cavidades irregulares, espera-se contribuir de modo efetivo, pois suas aplicações são de importância inquestionável.

1.2 - REVISÃO DE LITERATURA

A quase totalidade do fundamento de modelagem aqui utilizado é devido a Maliska [1]. Com efeito, a metodologia desenvolvida por esse autor é aqui seguida para solucionar o problema da convecção natural laminar em cavidades arbitrárias. Seu trabalho volta-se para o desenvolvimento de um método de solução para o problema de fluxo hidrodinâmico tridimensional em dutos com seção transversal arbitrária. Aqui é de especial interesse a parcela de sua metodologia relacionada à solução apenas para seções transversais de dutos, ou seja, cavidades irregulares bidimensionais. As seguintes feições desse trabalho são consideradas:

- a) - Uso de um sistema de coordenadas não ortogonais adaptado às fronteiras irregulares do domínio;

- b) - Obtenção da solução em domínio transformado;
- c) - Equações de conservação em diferenças finitas envolvendo tanto velocidades cartesianas quanto contravariantes;
- d) - Localização das variáveis dependentes em arranjo de grade deslocado;
- e) - Solução obtida em termos das variáveis primitivas usando a técnica S.O.R. [8];
- f) - Acoplamento pressão-velocidade resolvido pelo método PRIME (ver Capítulo 6);
- g) - Aplicação das condições de contorno para as variáveis dependentes nas fronteiras arbitrárias.

O método de Maliska é, entretanto, puramente hidrodinâmico, havendo a necessidade de inclusão da equação de conservação da energia, e da consideração dos efeitos físicos característicos da convecção natural. Trata-se o presente trabalho, portanto, de uma extensão do citado método simplificado para o caso bidimensional, para abranger também os problemas relacionados à transferência de calor.

A bibliografia apresenta modelos bidimensionais para a solução de problemas de convecção natural laminar em cavidades usando preferencialmente os métodos de elementos finitos e de diferenças finitas. Uma contribuição relevante em termos bibliográficos é devida a Davis & Jones [18]. Nesse trabalho, os autores conduzem uma análise comparativa entre os diversos resultados para o problema de convecção natural em cavidades quadradas colhidos por vários pesquisadores usando as mais variadas técnicas de solução. Os vários resultados são aferidos em relação a uma solução referencial pelo estabelecimento de erros percentuais. O referencial utilizado é a solução de Davis [17]. Esse trabalho apresenta a solução do problema bidimensional de convecção natural laminar em cavidades quadradas com paredes horizontais termicamente isoladas, e paredes verticais à temperaturas constantes diferentes. O fluido considerado é o ar, e a formulação do problema é feita em termos de função

corrente-vorticidade, usando a metodologia de diferenças finitas. Os resultados são obtidos para números de Rayleigh entre 10^3 e 10^6 , atribuindo o autor precisão de 1% para aqueles relacionados aos maiores valores de Rayleigh, e de menos de 0,1% para aqueles relativos aos menores valores desse número. Esta solução é usada como termo de comparação para teste do modelo aqui delineado.

Dentro da classe dos trabalhos que utilizam o método de elementos finitos encontra-se o de Chang et al. [14]. Nesse trabalho é apresentada uma análise bidimensional para problemas de convecção natural em cavidades formadas por tubos concêntricos isotérmicos a temperaturas diferentes, usando a técnica de elementos finitos de Galerkin. Os resultados de Chang são comparados àqueles obtidos com o presente modelo.

Entre os trabalhos que aplicam o método de diferenças finitas para solucionar o problema da convecção natural em cavidades regulares estão os de Davis [16], Robillard et al. [15] e Napolitano et al. [13]. Todos estes utilizam formulação em termos de função corrente-vorticidade.

Quanto à formulação em termos das variáveis primitivas (velocidade, pressão e temperatura), a bibliografia é bastante deficiente. Isso é facilmente compreensível, pois a formulação em termos de função corrente-vorticidade elimina o problema do acoplamento pressão-velocidade, que é a grande dificuldade na obtenção de soluções usando formulação em termos das variáveis primitivas.

A despeito da existência de um grande número de trabalhos que tratam do problema da convecção natural em cavidades, na sua quase totalidade são desenvolvidos para cavidades regulares, havendo uma grande carência no campo das cavidades irregulares. Estas, por exigirem um tratamento especial quanto a aplicação das condições de contorno, introduzem dificuldades que podem conduzir a soluções bastante desafiadas em relação a real (ver Capítulo 2). A deficiência de pesquisas nessa área é então perfeitamente explicável, pois é relativamente recente o surgimento de uma metodologia eficaz no tratamento das fronteiras irregulares. Tal desenvolvimento, devido a Thompson, Thames & Mastin [4], é descrito no Capítulo 2. No campo das cavidades irregulares, situa-se o trabalho de Patel & Briggs [19]. Esses autores utilizam uma extensão do método clássico

co MAC (MArker and Cell) para resolver o problema da convecção natural laminar em cavidades arbitrárias, com o auxílio da metodologia proposta em [8]. A solução é obtida usando a técnica de diferenças finitas, e em termos das variáveis primitivas. Não há, entretanto, resultados disponíveis de maneira precisa para fins de comparação, fato agravado pela circunstância de se ter tomado conhecimento desse trabalho já em fase de conclusão desta dissertação. Algumas referências adicionais ao trabalho de Patel & Briggs são feitas nos Capítulos 5 (Seção 5.3) e 6 (Seção 6.6).

Neste trabalho a solução é obtida em termos das variáveis primitivas, sendo utilizado o método PRIME para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Ao admitir também as geometrias mais irregulares, o modelo mostra-se bastante eficaz e de considerável generalidade.

Na solução de problemas de convecção natural, é prática comum a utilização da aproximação de Boussinesq (ver Capítulo 3). Spiegel & Veronis [23], Mihaljan [24] e Gray & Giorgini [25] preocuparam-se em estabelecer as condições de validade dessa aproximação, e suas conclusões estão contidas no Capítulo 3.

Para uma melhor compreensão do fenômeno da convecção natural e da modelagem dos termos de flutuação, buscou-se alguns subsídios em Landau [22]. Essa apreciação pode ser encontrada no Apêndice C.

1.3 - DELINEAMENTO DA DISSERTAÇÃO

A continuação da dissertação desenvolve-se como segue

CAPÍTULO 2 - GERAÇÃO DE UM SISTEMA NATURAL DE COORDENADAS. Nesse capítulo descreve-se o método adotado para geração do sistema não-ortogonal curvilíneo generalizado de coordenadas. Apresenta-se a transformação executada e o sistema elíptico resultante. Mostra-se ainda as malhas geradas que são utilizadas para discretizar os domínios sobre os quais os resultados numéricos finais são obtidos.

CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA. Esse capítulo é dedicado à descrição do problema objeto deste trabalho. São apresentadas as hipóteses consideradas. As equações de conservação são introduzidas no sistema cartesiano. Apresenta-se ainda uma discussão sobre

a modelagem e aplicação da aproximação de Boussinesq em problemas de convecção natural.

CAPÍTULO 4 - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES GOVERNANTES. Nesse capítulo executa-se a transformação das equações governantes do sistema cartesiano para o sistema generalizado de coordenadas. Justifica-se ainda a manutenção das velocidades cartesianas como variáveis dependentes.

CAPÍTULO 5 - EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO TRANSFORMADO. Esse capítulo tem por finalidade a obtenção das equações em diferenças finitas que aproximam o sistema de equações diferenciais parciais transformadas. Inicialmente faz-se a identificação do arranjo de grade, seguindo-se uma breve discussão sobre o posicionamento das variáveis dependentes. Segue a descrição da aproximação em diferenças finitas, e sua obtenção pelo método do volume de controle, com as equações de movimento escritas em formulação u-v.

CAPÍTULO 6 - ALGORITMO DE SOLUÇÃO. Nesse capítulo descreve-se o procedimento de solução adotado na resolução das equações de conservação. Inicialmente trata-se da questão da formulação U-V. Apresenta-se a formulação incompressível e enfoca-se o problema do acoplamento pressão-velocidade nas equações de movimento. Descreve-se o método PRIME, usado para solucionar o problema do acoplamento pressão-velocidade. Posteriormente trata-se da questão da consideração das condições de contorno para as várias variáveis dependentes, e enfatiza-se alguns detalhes numéricos.

CAPÍTULO 7 - RESULTADOS OBTIDOS. Nesse capítulo o modelo numérico é testado. Como primeiro teste resolve-se o problema hidrodinâmico de fluxo em cavidade quadrada com um dos lados em movimento. A seguir obtêm-se a solução para o problema da convecção natural laminar em cavidades quadradas com paredes horizontais termicamente isoladas, e paredes verticais isotérmicas à temperaturas diferentes. Esses problemas são resolvidos sobre malhas ortogonais e não-ortogonais. Encontra-se ainda a solução para o problema bidimensional de convecção natural laminar em torno de um tubo quadrado envolvido de modo concêntrico por um cilindro circular. Por fim, resolve-se o problema da convecção natural laminar para uma cavi-

de completamente irregular. Todos esses problemas são resolvidos para números de Rayleigh entre 10^3 e 10^6 .

CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES. Esse capítulo encarrega-se da colocação de todas as conclusões obtidas durante o desenvolvimento deste trabalho. Apresenta também algumas sugestões e recomendações para futuros trabalhos a serem realizados no âmbito do assunto desta dissertação.

CAPÍTULO 2

GERAÇÃO DE UM SISTEMA NATURAL DE COORDENADAS

2.1 - INTRODUÇÃO

A busca de generalidade para os esquemas numéricos sugere a necessidade da discretização de domínios físicos usando sistemas de coordenadas que se adaptem às suas fronteiras. Se tais sistemas são utilizados, a aplicação de condições de contorno fica bastante mais simples e precisa, pois evita-se as interpolações entre pontos de grade não coincidentes com as fronteiras.

Nesse capítulo apresenta-se um método para geração de malhas sobre regiões de contornos arbitrários. O método, devido a Thompson et al. [4], tem seu desenvolvimento baseado nos trabalhos de Winslow [2] e Chu [3], e consiste na geração de um sistema de coordenadas de maneira rápida e automática através da solução de um sistema de equações diferenciais parciais elípticas do tipo Poisson. As linhas coordenadas desse sistema são geradas de modo a adaptarem-se geometricamente ao domínio físico considerado, assumindo configurações semelhantes às fronteiras desse domínio (processo análogo ao da obtenção de linhas térmicas equipotenciais para problemas de condução de calor em meio sólido, os quais são governados por equações de Poisson). Ao longo de cada uma das fronteiras, uma das coordenadas naturais é especificada como constante, e a outra é assumida como variando monotonicamente. Assim, há uma linha coordenada coincidente com cada fronteira. O procedimento não é restrito a duas dimensões, permite que as linhas coordenadas sejam concentradas como desejado, e é aplicável a quaisquer regiões simples ou multiplamente conexas (domínios contendo qualquer número de corpos de formas arbitrárias).

O sistema de equações de Poisson definido no plano físico é convertido e resolvido em plano transformado, onde o domínio passa a ser representado por uma malha retangular fixa independente de suas formas físicas, e independente do espaçamento entre linhas coordenadas no plano físico. O algebrismo necessário para relacio-

nar o sistema natural de coordenadas (ξ, η) ao cartesiano, e para conversão do plano físico para o transformado, é apresentado a seguir.

2.2 - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

Considere-se um domínio bidimensional arbitrário definido no sistema cartesiano como o da Figura 2.1. Pretende-se mapear esse

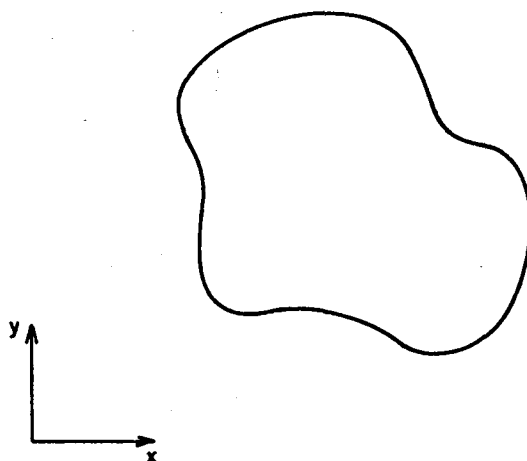


Figura 2.1 - Domínio de fronteiras arbitrárias no plano físico.

domínio sobre um retângulo definido no sistema (ξ, η) como o da Figura 2.2. Para alcançar tal objetivo usa-se as seguintes transformações

$$\xi = \xi(x, y) \quad (2.1)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (2.2)$$

Qualquer domínio irregular no plano físico poderá ser transportado para o plano transformado na forma retangular mediante a aplicação das Equações (2.1) e (2.2).

A matriz Jacobiano para a transformação é

$$[J] = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

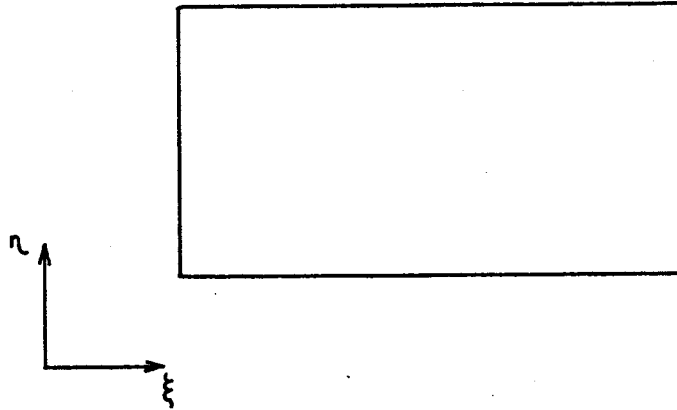


Figura 2.2 - Domínio de fronteiras arbitrarias no plano transformado.

onde os subscritos indicam derivadas parciais. O Jacobiano da transformação é

$$J = \det[J] = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x . \quad (2.4)$$

Aplicando o teorema fundamental da função inversa ([6], Capítulos 8 e 9) obtém-se as seguintes relações (ver Apêndice B)

$$\xi_x = \eta_y J , \quad \xi_y = -\eta_x J \quad (2.5)$$

$$\eta_x = -\xi_y J , \quad \eta_y = \xi_x J . \quad (2.6)$$

As derivadas parciais são transformadas pelo uso da regra da cadeia como segue

$$f_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \quad (2.7)$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y . \quad (2.8)$$

As derivadas de maior ordem são obtidas por aplicações sucessivas das equações acima (ver Apêndice B). Em Thompson et al. [5] pode-se encontrar toda uma série de funções e derivadas transformadas.

2.3 - GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS (ξ, η)

A questão que ora se apresenta é a de como determinar as funções ξ e η dadas pelas Equações (2.1) e (2.2). O método automático de geração deve fazer com que o sistema natural de coordenadas (ξ, η) seja a solução de um sistema de equações diferenciais parciais elípticas no domínio físico, com condições de contorno de Dirichlet prescritas em todas as fronteiras [5], [3]. O sistema elíptico linear, de acordo com a transformação já definida é dado por

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (2.9)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (2.10)$$

Esse sistema elíptico é claramente adequado, pois um campo bastante amplo de problemas, dos quais as soluções podem ser tomadas como linhas coordenadas, são governados por equações desse tipo (condução de calor, potencial elétrico, campo magnético, etc). A fundamentação matemática é baseada no fato de que a solução de um sistema elíptico resulta em funções harmônicas, que obedecem a um princípio de máximo. Esse princípio estabelece que os valores máximos e mínimos da função devem ocorrer sobre as fronteiras. Assim, já que nenhum extremo ocorre dentro do domínio, as primeiras derivadas da função não serão nulas simultaneamente, o que garante que o Jacobiano não será nulo devido à presença de um extremo. O princípio de máximo também garante a unicidade da transformação.

Considere-se o caso da geração de um sistema natural de coordenadas que se adapte às fronteiras do domínio duplamente conexo mostrado na Figura 2.3. O sistema gerado no plano físico é representado pelas Equações (2.9) e (2.10), com as seguintes condições de contorno de Dirichlet

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 = \text{Constante em } \sigma_1 \\ \eta &= \eta_2 = \text{Constante em } \sigma_2 \\ \xi &= \xi_1(x, y) \rightarrow \text{Função especificada em } \sigma_1 \\ \xi &= \xi_2(x, y) \rightarrow \text{Função especificada em } \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Este sistema é agora convertido para o plano transformado, o qual é representado por linhas retas de ξ e η constantes. As células

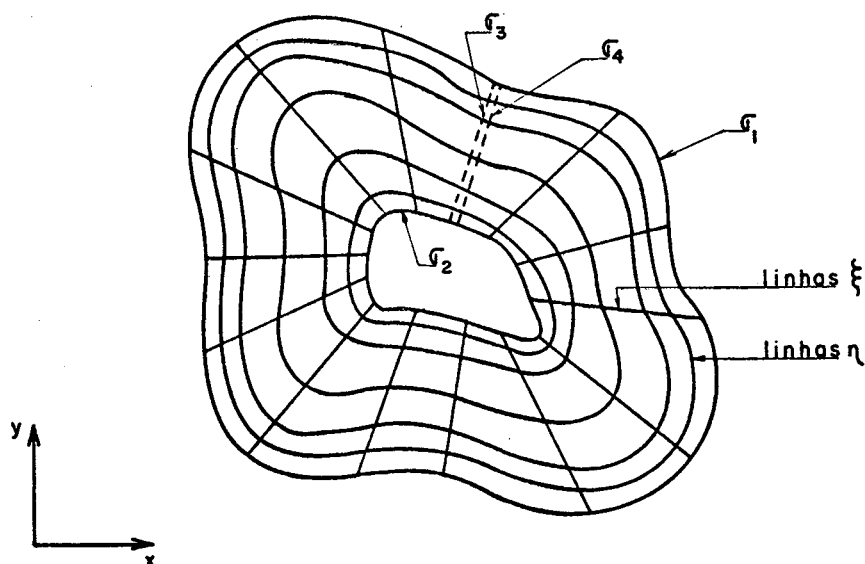


Figura 2.3 - Sistema natural de coordenadas.

las de malha são escolhidas em forma quadrangular com lados de comprimento unitário por simplicidade (ou seja, $\Delta\xi=\Delta\eta=1$). A Figura 2.4 mostra o domínio transformado correspondente ao domínio físico mostrado na Figura 2.3. Como pode ser observado, σ_1 é mapeado sobre σ_1^* , σ_2 sobre σ_2^* , σ_3 sobre σ_3^* e σ_4 sobre σ_4^* . σ_1 e σ_2 , no plano físico, são linhas de η constante, de modo que aparecem como constantes no domínio transformado. O corte imaginário (σ_3 e σ_4) é escolhido de modo a situar-se ao longo de linhas de ξ constante.

Os passos da transformação das Equações (2.9) e (2.10) de geração de malhas, do plano físico para o transformado, são dados no Apêndice B.

O sistema elíptico quase-linear resultante dessa transformação é dado por

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \quad (2.12)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0, \quad (2.13)$$

com as condições de contorno de Dirichlet seguintes

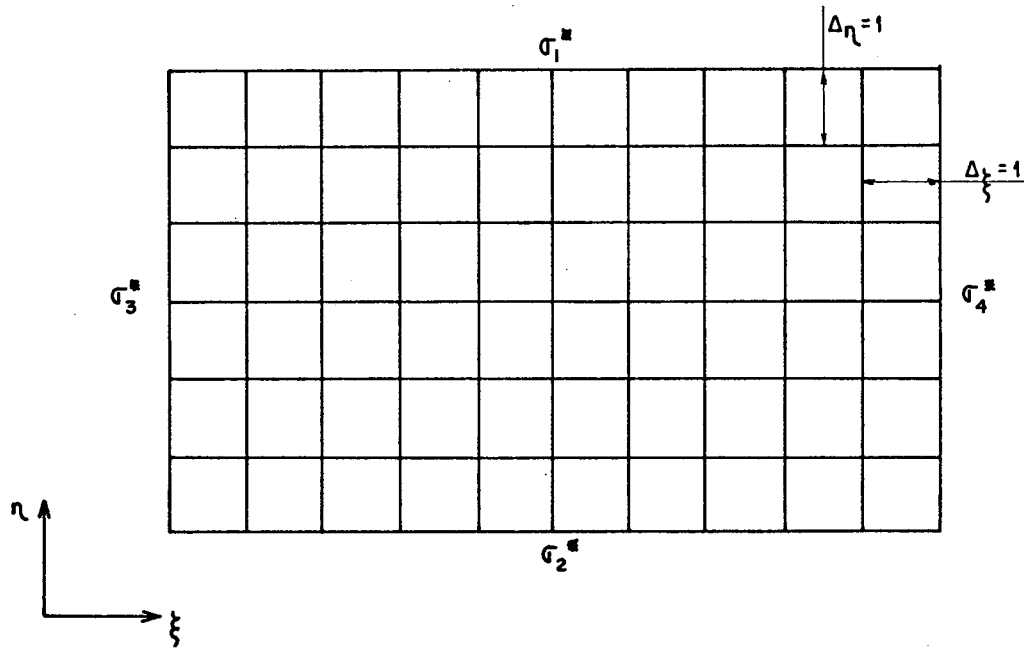


Figura 2.4 - Plano transformado (ξ, η) .

$$\begin{aligned}
 x &= f_1(\xi, \eta_1) \text{ em } \sigma_1^* \\
 y &= f_2(\xi, \eta_1) \text{ em } \sigma_1^* \\
 x &= g_1(\xi, \eta_2) \text{ em } \sigma_2^* \\
 y &= g_2(\xi, \eta_2) \text{ em } \sigma_2^*
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Os coeficientes de acoplamento entre as equações acima são (ver Apêndice A)

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \tag{2.15}$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \tag{2.16}$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \tag{2.17}$$

As Funções f_1 , f_2 , g_1 e g_2 são determinadas pela forma do domínio físico e pela distribuição escolhida das linhas ξ como desejado ao longo das fronteiras σ_1 e σ_2 . Não há necessidade de especificação de funções para x e y ao longo de σ_3 e σ_4 , visto que $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ são periódicas nessa região, ou seja, desde que σ_3 e σ_4 são coincidentes, as condições de contorno no domínio

transformado são repetitivas.

O sistema transformado formado pelas Equações (2.12) e (2.13), acoplado através de seus coeficientes, é consideravelmente mais complexo que aquele formado pelas Equações (2.9) e (2.10) definido no plano físico. Entretanto, as condições de contorno no plano transformado dadas pelas Equações (2.14) são especificadas sobre fronteiras retas, e o espaçamento entre linhas coordenadas é feito uniforme.

Usando as equações transformadas, todo o trabalho de computação necessário para gerar o sistema de coordenadas e, posteriormente para resolver o problema físico (convecção natural em cavidades), será executado sobre uma malha quadrangular fixa independente da forma do domínio físico e independente do espaçamento escolhido entre as linhas coordenadas. A grande vantagem desse procedimento é que o código de computador é independente da geometria considerada.

Como exemplo de sistema de coordenadas não-ortogonal gerado para um domínio duplamente conexo, apresenta-se a Figura 2.5.

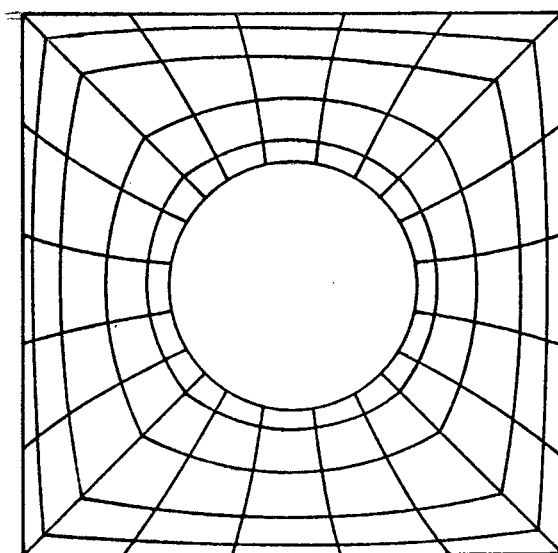


Figura 2.5 - Exemplo de um sistema natural de coordenadas não-ortogonal para um domínio duplamente conexo.

Os problemas físicos tratados neste trabalho, no entanto, são todos definidos para domínios simplesmente conexos. A geração de um sistema natural de coordenadas para esses domínios é feita sub-

dividindo-se as fronteiras do domínio físico em quatro segmentos, sendo cada um deles equivalente a um dos lados do retângulo no plano transformado. Dois desses segmentos são de linhas ξ constantes, e dois de linhas η constantes. Todo o procedimento é o mesmo daquele para domínios duplamente conexos. As Figuras 2.6 e 2.7, que representam sistemas de coordenadas naturais não-ortogonais gerados sobre os domínios físicos resolvidos no Capítulo 7, são exemplos desse procedimento.

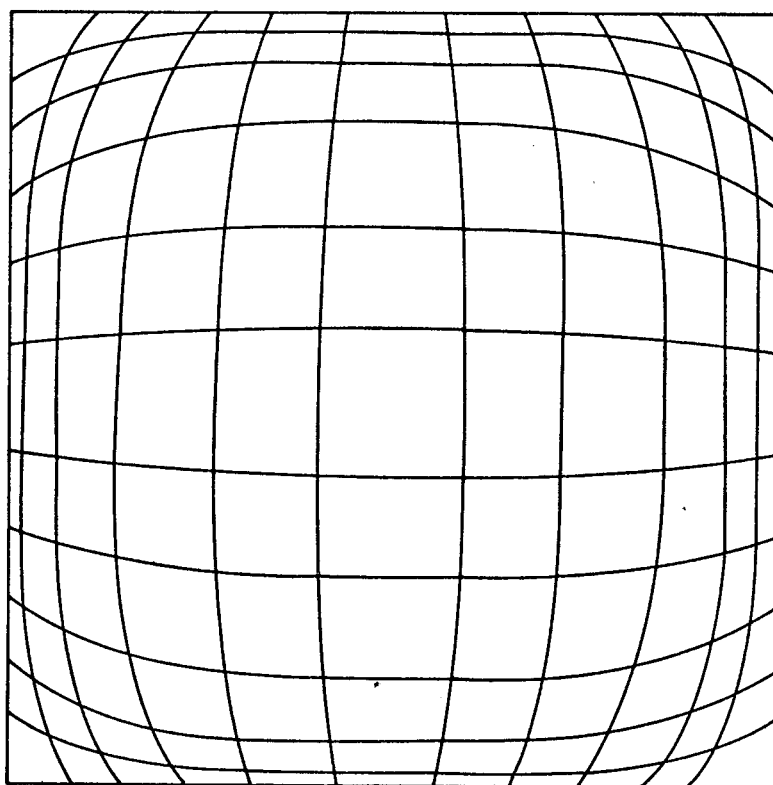


Figura 2.6 - Exemplo de um sistema de coordenadas não-ortogonal para uma região simplesmente conexa.

2.4 - CONTROLE DE ESPAÇAMENTOS

Um detalhe de grande importância exigido de um método de geração de malhas é a flexibilidade na concentração de linhas coordenadas onde uma alta resolução de grade se faz necessário, de acordo com o problema físico em questão.

A localização das linhas coordenadas pode ser controlada usando as funções $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ apropriadas, as quais aparecem como termos fonte nas Equações (2.12) e (2.13). Nesse trabalho são usadas as funções recomendadas por Thompson et al. [5]. São

as seguintes

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^m a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) e^{-c_i |\xi - \xi_i|} - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) e^{-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}} \quad (2.18)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^m a_i \operatorname{sgn}(\eta - \eta_i) e^{-c_i |\eta - \eta_i|} - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\eta - \eta_j) e^{-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}}. \quad (2.19)$$

O primeiro termo da Equação (2.18) tem o efeito de atrair as linhas de ξ constante para as linhas $\xi = \xi_i$. O segundo termo faz com que as linhas ξ sejam atraídas para os pontos (ξ_j, η_j) . O mesmo comentário é válido para as linhas η na Equação (2.19). A função $\operatorname{sgn}(x)$ é definida como 1, 0 ou -1, dependendo de x ser positivo, nulo ou negativo. As Figuras 2.5, 2.6 e 2.7 são exemplos de sistemas de coordenadas gerados usando as funções fonte $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$.

2.5 - SOLUÇÃO NUMÉRICA DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE GERAÇÃO

O sistema de equações elípticas foi resolvido no plano transformado, onde $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ foram igualados à unidade por conveniência. As derivadas nas equações transformadas foram aproximadas por expressões de segunda ordem em diferenças centrais. A solução foi obtida iterativamente usando a técnica S.O.R. (Sucessive Over Relaxation). Usou-se fatores de relaxação variados na geração das malhas para os domínios de cálculo considerados no Capítulo 7. Dependendo da geometria, do número de células da malha, e da ordem de grandeza das coordenadas físicas, varia o valor do parâmetro de relaxação para convergência mais rápida, e variam os valores dos coeficientes a , b , c e d (Equações (2.18) e (2.19)) para controle de espaçamento. O trabalho não foi orientado para a busca de coeficientes de relaxação otimizados. Detalhes das aproximações em diferenças finitas podem ser encontrados no Apêndice B.

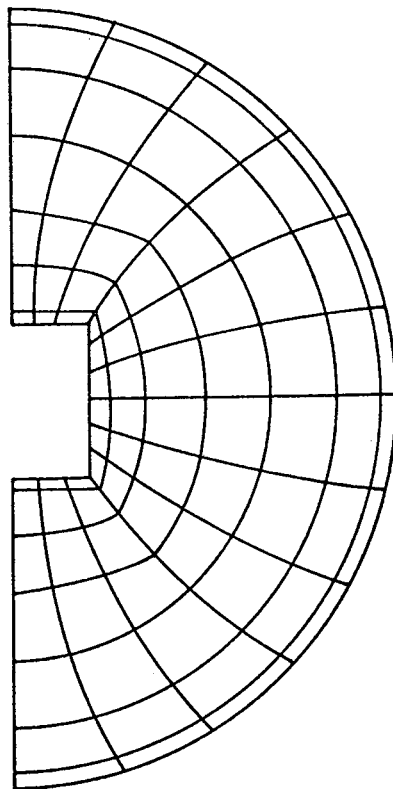


Figura 2.7 - Exemplo de sistema natural de coordenadas não-ortogonal para uma região simplesmente conexa.

2.6 - CONCLUSÕES E SUMÁRIO

Nesse capítulo foi introduzida uma transformação do sistema cartesiano para o sistema generalizado de coordenadas capaz de dar tratamento adequado à geometrias irregulares. Apresentou-se um método automático para geração de malhas. Definiu-se as transformações para um plano onde a malha gerada sobre o domínio físico, independentemente de suas formas e espaçamentos, passa a ser representada por uma malha retangular fixa de células quadrangulares uniformes. Usando as funções de geração $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$, conseguiu-se a flexibilidade do método na concentração das linhas de grade nos locais desejados. Isso foi verificado pela solução do sistema de equações de geração para algumas geometrias diferentes. Os dados iniciais a serem supridos são a forma do domínio físico definido pela série de pontos discretos no sistema (x, y) , e os valores das constantes a , b , c e d nas Equações (2.18) e (2.19).

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a formulação do problema da convecção natural laminar em cavidades arbitrárias. As hipóteses simplificativas para a construção do modelo matemático são estabelecidas, sendo dado enfoque especial para a consideração da aproximação de Boussinesq, a qual é discutida em termos físicos e de modelagem matemática.

Introduz-se as equações diferenciais que governam o problema. Estas são escritas em forma fortemente conservativa e em coordenadas cartesianas para um campo escalar genérico ϕ , o qual representa qualquer propriedade transportada. Apresenta-se também o sistema de equações governantes discriminadas para representar as conservações de massa, movimento e energia, respectivamente.

3.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema aqui resolvido é o da convecção natural laminar bidimensional para cavidades irregulares em regime permanente. As fronteiras do domínio físico são subdivididas em quatro segmentos sobre os quais estão prescritas as seguintes condições de contorno: fronteiras sólidas, de modo que as velocidades são nulas sobre elas; duas fronteiras opostas termicamente isoladas, enquanto as duas restantes são isotérmicas à temperaturas diferentes T_0 e T_1 . As transformações destas condições de contorno para o plano onde as equações são resolvidas não representa qualquer dificuldade. A Figura 3.1 ilustra tal situação sobre o sistema de coordenadas cartesianas, onde o eixo y alinha-se com a direção gravitacional. O gradiente térmico imposto ao domínio em combinação com a ação do campo gravitacional faz surgir forças de flutuação no meio fluido. Essas forças dão origem ao fenômeno da convecção natural. No Apêndice C dá-se um enfoque termodinâmico a essa questão, estabelecendo-se o critério para que haja convecção natural.

As hipóteses consideradas na elaboração do modelo matemático são apresentadas na seção seguinte, quando da obtenção do sistema de equações que governa o problema.

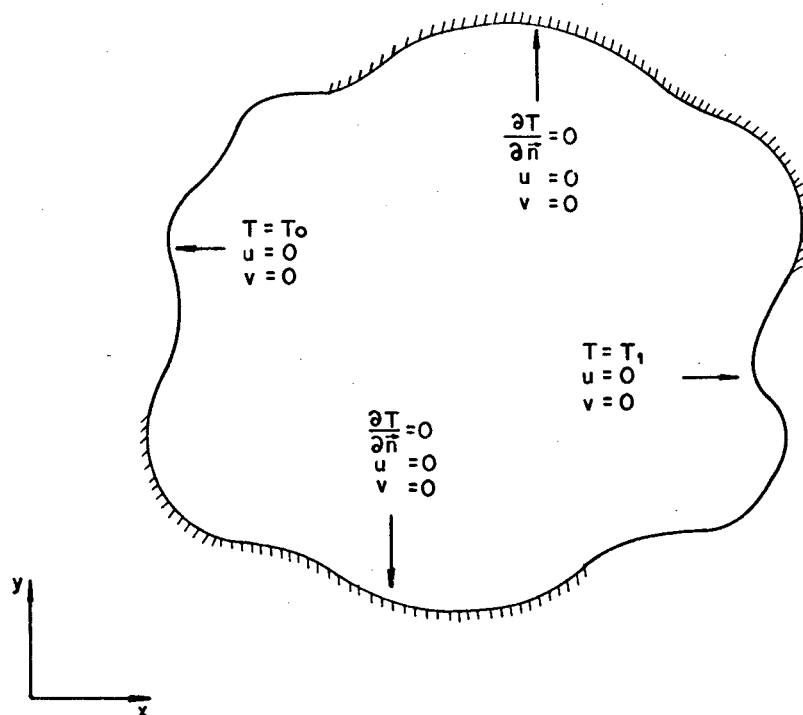


Figura 3.1 - Características geométricas e condições de contorno para o problema de convecção natural laminar em cavidades arbitrárias.

3.3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES NO SISTEMA CARTESIANO DE COORDENADAS

Uma forma bidimensional fortemente conservativa para as equações de conservação pode ser escrita, em coordenadas cartesianas, da forma seguinte [7], [1]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + p\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + S^\phi, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} q &= \rho\phi \\ E &= \rho u\phi; \quad F = \rho v\phi \\ R &= \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad S = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.2)$$

A Equação (3.1) representa a conservação da massa quando p^ϕ e S^ϕ são nulos e ϕ igual a 1. As duas equações de movimento nas

direções x e y são obtidas fazendo ϕ igual a u e v respectivamente, com os termos fonte e de pressão adequados. A equação de energia é também obtida fazendo ϕ igual a T , com P^ϕ e S^ϕ nulos.

A grandeza Γ^ϕ representa o coeficiente de transporte difusivo para as equações de movimento e energia. Esse fator, para fluxos laminares, é igual a viscosidade absoluta para as equações de movimento, e igual a relação entre a condutibilidade térmica do fluido e seu calor específico à pressão constante para a equação de energia.

No desenvolvimento das equações governantes é feita a hipótese de fluidos newtonianos com viscosidade absoluta, massa específica e todas as demais propriedades constantes. Faz-se também a hipótese de escoamentos incompressíveis (ver Capítulo 6, Seção 6.3). Essas considerações reduzem as equações de movimento a uma forma simplificada. O termo fonte S^ϕ anula-se então para a equação de movimento em u e, reduz-se ao termo forças de corpo para a equação de movimento em v .

Admite-se ainda como válida a aproximação de Boussinesq comumente empregada na solução de problemas de convecção natural. Essa aproximação é fundamental para o presente desenvolvimento, e é discutida na seção seguinte. Da sua aplicação resultam os termos fonte S^ϕ para as equações de energia e movimento em v apresentados na Tabela 3.1, representando este última as forças de flutuação atuantes no domínio. Nesta expressão β representa o coeficiente de expansão térmica do fluido e $\bar{\rho}$ sua massa específica, ambos tomados em relação à temperatura de referência \bar{T} . A Tabela 3.1 apresenta as grandezas S^ϕ , P^ϕ e Γ^ϕ para as equações governantes. O termo forças de flutuação apresentado nessa tabela é obtido na próxima seção.

O sistema de equações governantes resultante é o seguinte

Continuidade

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.3)$$

Movimento para u

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma^u \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma^u \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (3.4)$$

Tabela 3.1 - Grandezas p^ϕ , S^ϕ e Γ^ϕ para as equações governantes.

	$\phi = l$	$\phi = u$	$\phi = v$	$\phi = T$
p^ϕ	0	$\frac{\partial P}{\partial x}$	$\frac{\partial P}{\partial y}$	0
S^ϕ	0	0	$\bar{\rho} g \bar{\beta} (T - \bar{T})$	0
Γ^ϕ	0	μ	μ	$\frac{K}{c_p}$

Movimento para v

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma^v \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma^v \frac{\partial v}{\partial y}) + \rho g \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad (3.5)$$

Energia

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma^T \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma^T \frac{\partial T}{\partial y}) \quad (3.6)$$

As barras "—" sobre ρ , indicando seu valor médio, são omitidas por conveniência.

O objetivo deste trabalho é a obtenção de soluções em regime permanente. Não obstante, os termos transientes são mantidos nas equações de movimento e energia para fins de avanços iterativos pela consideração de transientes distorcidos. Esta é uma prática muito frequente, e que possibilita aumentos consideráveis na velocidade de convergência nos cálculos numéricos.

3.4 - APROXIMAÇÃO DE BOUSSINESQ

Como já observado, o movimento do fluido dentro da cavidade é consequência da ação das forças de flutuação. Uma modelagem simples para esse tipo de problema pode ser obtida pela aplicação da aproximação de Boussinesq. Essa aproximação é comumente compreen-

dida como constando das seguintes simplificações: a massa específica é assumida constante, exceto quando causa direta das forças de flutuação; todas as demais propriedades do fluido são assumidas constantes; e a dissipação viscosa é admitida como desprezável. A primeira colocação implica que a equação da continuidade assume sua forma incompressível, e a massa específica é considerada variável somente no termo de forças de flutuação das equações de movimento. As hipóteses citadas acima foram consideradas na formulação das equações governantes feita na seção anterior.

As forças de flutuação responsáveis pela ocorrência da convecção natural têm sua origem na combinação de efeitos de empuxo e atração gravitacional. Assumida a aproximação de Boussinesq, busca-se agora uma expressão matemática para tais forças. Nesse intuito, considere-se um fluido incompressível de massa específica $\bar{\rho}$ a uma dada temperatura \bar{T} . Devido aos gradientes térmicos presentes no domínio de interesse, surgem porções desse fluido onde a massa específica torna-se diferente de $\bar{\rho}$, assumindo o valor ρ que é função da temperatura local. Pelo princípio de Arquimedes, a força de empuxo em jogo é dada pelo peso do fluido deslocado, quando nele é presente um meio de massa específica diferente da sua. Assim, a força peso atuando sobre as porções do fluido de massa específica ρ é dada por $\rho g V$, enquanto a força de empuxo atuante sobre essas porções é $\bar{\rho} g V$. Nestas expressões V representa o volume de fluido deslocado, e g a aceleração da gravidade. A força de flutuação por unidade de volume pode então ser definida, obedecendo o sentido oposto à gravidade convencional para o eixo coordenado y , como

$$F_y = \bar{\rho} g - \rho g ,$$

ou

$$F_y = -(\rho - \bar{\rho})g . \quad (3.7)$$

A termodinâmica postula que uma propriedade extensiva qual quer de um fluido homogêneo pode, do ponto de vista macroscópico, ser expressa como função de duas de suas propriedades intensivas, e vice-versa. Assim, a massa específica (extensiva) pode ser expressa em função de pressão e temperatura (intensivas), ou seja $\rho = \rho(T, P)$. O diferencial de ρ é dado por

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T dP . \quad (3.8)$$

Como é feita a hipótese de escoamentos incompressíveis, o termo $\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$ é desprezado. Assumindo ainda que as variações de ρ e T são suficientemente pequenas, pode-se exprimir a Equação (3.8) em termos finitos, ou seja

$$\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \Delta T . \quad (3.9)$$

Escrevendo a Equação (3.9) em relação à temperatura de referência \bar{T} , e utilizando a definição do coeficiente de expansão volumétrica $\bar{\beta} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$, também referido a \bar{T} , obtém-se

$$(\rho - \bar{\rho}) = -\bar{\rho} \bar{\beta} (T - \bar{T}) . \quad (3.10)$$

A Equação (3.10) multiplicada pela aceleração da gravidade g e combinada com a Equação (3.7) resulta

$$F_y = \bar{\rho} g \bar{\beta} (T - \bar{T}) , \quad (3.11)$$

que é o termo forças de flutuação utilizado na equação de movimento em y , mostrado na Tabela 3.1.

Existem outros procedimentos que permitem a obtenção da Equação (3.11). O procedimento introduzido por Landau [22], dado no Apêndice C (Seção C.3), é bastante elucidativo. Uma outra maneira de obter a Equação (3.11), também dado no Apêndice C, é através da expansão de ρ em série de Taylor.

Uma questão de importância é a especificação da temperatura de referência \bar{T} . Para o caso de convecção natural sobre uma placa plana, \bar{T} é a temperatura distante da superfície, ou seja, fora da camada limite térmica, onde os efeitos térmicos da convecção natural não estão presentes. Para o caso de convecção natural entre duas placas paralelas verticais isotérmicas à temperaturas diferentes, \bar{T} é dada pela média aritmética entre essas duas temperaturas [21]. Quando o objetivo é resolver o problema da convecção natural em cavidades retangulares com duas fronteiras opostas ter

micamente isoladas, e as duas restantes isotérmicas à temperaturas diferentes, \bar{T} é avaliado de maneira idêntica a do caso anterior. Para o caso presente de cavidades irregulares, propõe-se aqui considerar \bar{T} como a temperatura média ponderada sobre todo o domínio de cálculos. Essa consideração é fundamentada no fato de que as cavidades irregulares são em geral assimétricas em relação às suas fronteiras, devendo \bar{T} ser determinada de maneira a equilibrar as disparidades de extensão que possam existir entre

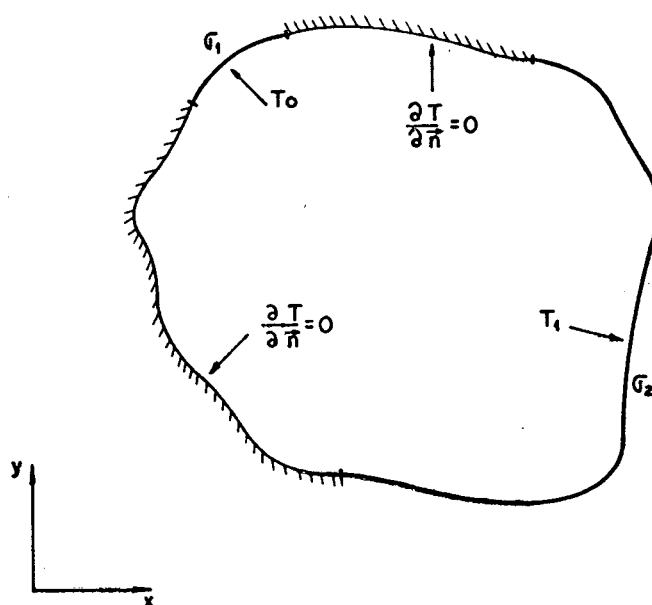


Figura 3.2 - Domínio arbitrário com fronteiras desproporcionais.

os contornos com temperatura especificada. Suponha-se o caso do domínio arbitrário esquematizado na Figura 3.2. Evidentemente a temperatura especificada em σ_2 terá maior influência na composição do campo de temperaturas no domínio, do que aquela especificada em σ_1 , pois o seu campo de ação é geometricamente maior. Para um dado fluido, \bar{T} é juntamente com a temperatura local, o fator determinante da ordem de grandeza das forças de flutuação em cada região do domínio. Tomando \bar{T} , para o caso da Figura 3.2, como uma simples média aritmética de T_0 e T_1 , estar-se-ia induzindo erros grosseiros nos cálculos das forças de flutuação. É importante salientar que, ao se trabalhar sobre domínios de fronteiras simétricas (cavidades quadradas, por exemplo), o valor de \bar{T} calculado de maneira ponderada sobre todo o domínio tenderá à média aritmética dos valores especificados nas fronteiras.

3.5 - VALIDADE DA APROXIMAÇÃO DE BOUSSINESQ

Existem alguns trabalhos elaborados com a finalidade de verificar a validade da aplicação da aproximação de Boussinesq em problemas de convecção natural.

Spiegel & Veronis [23] examinaram as equações diferenciais governantes com a finalidade de estabelecer as condições dessa validade. Enunciaram condições em termos intuitivos, e demonstraram através de análises de ordem de grandeza que suas suposições implicam na validade da aproximação de Boussinesq. Tais condições são: que as equações sejam aplicadas a camadas finas de fluido, de altura d muito menor que a altura D característica do problema; e que as flutuações induzidas na massa específica e pressão não excedam, em ordem de magnitude, às variações estáticas destas quantidades. Essas condições implicam em que, ao longo da altura d , quando infinitesimal, a massa específica assuma um valor que possa ser considerado constante nas equações de movimento, sendo variável apenas no termo forças de flutuação que está relacionado à massa específica no restante do domínio de altura D (primeira condição). Se a altura d for finita, para que a consideração acima seja verdadeira é necessário que a variação da massa específica ao longo de d seja de ordem inferior à da variação ao longo de D (segunda condição). O mesmo raciocínio vale para a pressão. Aquelas condições são então, em essência, a própria aproximação de Boussinesq.

Mihaljan [24], a exemplo de Spiegel & Veronis, tratou de estabelecer condições de validade para Boussinesq. Entretanto, em vez de partir da física intuitiva, optou pelo rigor matemático na sua demonstração. Nesse intuito, estabeleceu uma série de parâmetros adimensionais pela manipulação das equações governantes e, baseando-se em análises de ordem de grandeza desses parâmetros, concluiu sobre os critérios que permitem a utilização do sistema de equações simplificado pela aproximação de Boussinesq. Suas conclusões foram as mesmas de Spiegel & Veronis.

Gray & Giorgini [25] repetiram o procedimento de análises de ordem de grandeza de [23] e [24]. Esses autores, no entanto, foram além. Em seu trabalho determinaram as condições de aplicabilidade da aproximação de modo explícito, permitindo o cálculo dos

limites de validade das equações simplificadas para líquidos e gases. Ainda, admitiram as propriedades dos fluidos variando linearmente com a temperatura e a pressão. Obtiveram resultados para uma camada horizontal de fluido de espessura vertical L , através da qual mantêm-se uma diferença de temperaturas θ . Para o ar à temperatura de 15°C e à pressão de 1 atm, sua análise determinou que a aproximação de Boussinesq é válida quando as seguintes condições são satisfeitas.

$$\theta \leq 28,6^{\circ}\text{C}$$

$$L \leq 8,3 \times 10^4 \text{ cm}$$

$$\frac{L}{\theta} \leq 1020 \text{ cm}/^{\circ}\text{C} .$$

Tendo em vista esses critérios, para o ar naquelas condições, concluíram que a validade se estende para números de Rayleigh da ordem de até 10^{17} .

Os resultados obtidos neste trabalho são para o ar, e para números de Rayleigh de até 10^6 . Ressalve-se entretanto, que as geometrias aqui consideradas são cavidades fechadas.

3.6 - CONCLUSÕES E SUMÁRIO

Esse capítulo foi dedicado à exposição das equações no sistema de coordenadas cartesiano que governam o problema da convecção natural. Este foi descrito e as hipóteses simplificativas foram estabelecidas. Concedeu-se atenção especial à modelagem e interpretação física da aproximação de Boussinesq, cuja utilização é de grande importância na formulação apresentada. Para a análise da aproximação de Boussinesq é importante a compreensão física do fenômeno da convecção natural. Uma discussão a esse respeito pode ser encontrada no Apêndice C.

CAPÍTULO 4

TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES GOVERNANTES

4.1 - INTRODUÇÃO

Nesse capítulo o sistema de equações diferenciais parciais que governa o problema é transformado do sistema cartesiano para o sistema generalizado de coordenadas. Enfatiza-se que as equações, após transformadas, mantêm sua forma plenamente conservativa, evitando o surgimento de fontes e/ou sumidouros das propriedades transportadas nas fronteiras dos volumes de controle elementares. Apresenta-se ainda uma discussão relativa à escolha das variáveis dependentes para as equações de conservação da quantidade de movimento. Justifica-se a opção pelas velocidades cartesianas, e aponta-se o caminho a ser seguido na manipulação das equações após transformadas.

4.2 - VARIÁVEIS DEPENDENTES PARA AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A velocidade, variável dependente das equações de conservação da quantidade de movimento, sendo uma grandeza vetorial, apresenta além do valor em módulo, uma direção e um sentido de atuação, os quais devem ser relacionados a um sistema de coordenadas usado como referencial. O vetor velocidade é então representado através de componentes relacionadas à direção e sentido de cada eixo coordenado.

Dado um sistema de coordenadas qualquer, os dois modos clássicos de representar um vetor nesse sistema são: através de suas componentes covariantes, e através de suas componentes contravariantes (ver Apêndice A). Devido ao caráter ortogonal do sistema cartesiano, as componentes covariantes e contravariantes dos vetores a ele referenciados coincidem (componentes cartesianas). Para os sistemas não-ortogonais estas componentes são distintas. Na Figura 4.1 mostra-se as componentes cartesianas do vetor velocidade

de (u,v) , assim como suas componentes covariantes (V_1, V_2) e contravariantes (V^1, V^2) relacionadas ao sistema generalizado de coordenadas (ξ, η) .

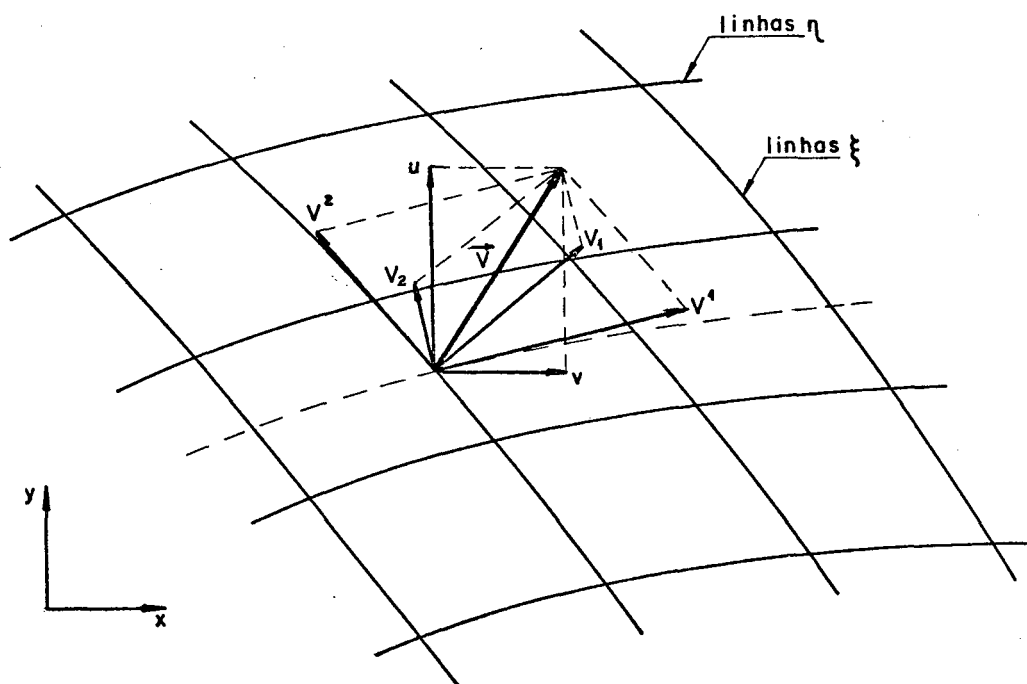


Figura 4.1 - Componentes cartesianas, covariantes e contravariantes do vetor velocidade \vec{V} .

A escolha das componentes mais adequadas para utilização nas equações de conservação da quantidade de movimento é aqui feita tendo em vista o seguinte critério: uma das componentes do vetor velocidade deve ser normal às linhas coordenadas, enquanto a outra deve ter direção tangencial a essas linhas (ver Figura 4.2). Tal consideração implica em que as citadas componentes normais sejam as únicas responsáveis pelo fluxo de massa através das linhas coordenadas, fazendo com que a equação da continuidade no plano transformado exiba estrutura semelhante àquelas para sistemas de coordenadas ortogonais (ver Equação 4.12). Um exame da Figura 4.1 indica que nenhuma das decomposições do vetor velocidade satisfaz ao critério estipulado. Em vista disso, este vetor é então re-decomposto de acordo com a condição proposta, dando origem às componentes normais U e V mostradas na Figura 4.2, sendo U normal às linhas de ξ constante e V normal às linhas de η constante. Tais componentes são denominadas contravariantes sem normalização métrica (ver Apêndice A).

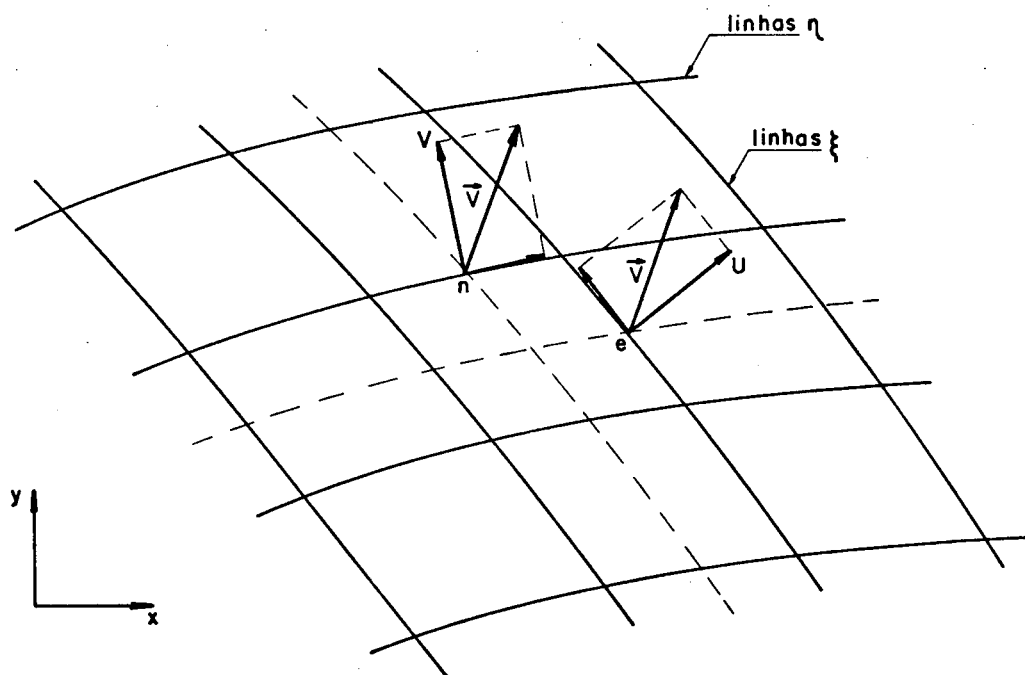


Figura 4.2 - Velocidades contravariantes sem normalização métrica.

Porém, a transformação das equações de movimento escritas para U e V torna-se muito complexa, e a interpretação física dos termos das equações resultantes fica bastante dificultada [1]. Assim, tendo em vista que as equações escritas para as velocidades cartesianas permitem uma transformação bastante simples, resultando em equações semelhantes às cartesianas de origem, adota-se o seguinte procedimento: Faz-se a transformação das equações mantendo-se as componentes cartesianas como variáveis dependentes, alterando-as posteriormente, depois de aproximadas, para que fiquem expressas em termos das velocidades contravariantes sem normalização métrica (ver Capítulo 6, Seção 6.2).

A essa altura, é importante destacar que a equação de conservação da quantidade de movimento para U é resolvida no plano transformado apenas para volumes de controle centrados sobre os pontos semelhantes ao ponto e da Figura 4.2, ao longo das linhas de ξ constante. Do mesmo modo, a equação para V é resolvida apenas para volumes centrados sobre os pontos semelhantes ao ponto n , ao longo das linhas de η constante (ver Capítulo 5, Seção 5.2). As componentes tangenciais mostradas na Figura 4.2 não participam do

procedimento de solução, sendo consequência das velocidades U e V calculadas. Destaca-se que, quando da resolução numérica há a necessidade de armazenar ambas as velocidades U e V nos mesmos pontos, sendo a velocidade não calculada em dado ponto avaliada através da média aritmética das velocidades vizinhas calculadas (ver Capítulo 6, Seção 6.3).

Algumas considerações a respeito das componentes covariantes e contravariantes de um vetor, bem como detalhes relativos à transformação de sistemas de coordenadas podem ser encontrados no Apêndice A.

4.3 - EQUAÇÕES TRANSFORMADAS

Aplicando a transformação geral definida pelas Equações (2.1) e (2.2) sobre a equação de conservação genérica cartesiana (Equação (3.1)), pode-se reescrevê-la para o domínio transformado mantendo sua forma plenamente conservativa [7], [1], como

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \hat{P}\phi = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{S}\phi, \quad (4.1)$$

onde

$$\hat{E} = \frac{1}{J} [\xi_x E + \xi_y F] \quad (4.2)$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} [\eta_x E + \eta_y F] \quad (4.3)$$

$$\hat{R} = \frac{1}{J} [\xi_x R + \xi_y S] \quad (4.4)$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J} [\eta_x R + \eta_y S] . \quad (4.5)$$

Nessas equações transformadas, $\hat{S}\phi$ e $\hat{P}\phi$ são os termos fonte e de pressão, e estão relacionados na Tabela 4.1. Os subscritos referem-se às derivadas parciais. Note-se que a estrutura da Equação (4.1) é semelhante àquela da Equação (3.1), da qual originou. A interpretação física de cada termo é então mantida.

Inserindo as Equações (4.2) a (4.5) na Equação (4.1), após alguma manipulação algébrica obtém-se

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V \phi) + \hat{p}^\phi = \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \hat{S}^\phi .$$

Tabela 4.1 - Termos fonte e de pressão para as equações de conservação transformadas.

$\hat{S}^u = 0$	$\hat{p}^u = \frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi$
$\hat{S}^v = \frac{1}{J} [\rho g \beta (T - \bar{T})]$	$\hat{p}^v = \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta$
$\hat{S}^T = 0$	$\hat{p}^T = 0$

As componentes contravariantes sem normalização métrica do vetor velocidade, que passam a ser denominadas apenas componentes contravariantes por simplicidade, são

$$U = y_\eta u - x_\eta v \quad (4.7)$$

$$V = x_\xi v - y_\xi u . \quad (4.8)$$

Os coeficientes da Equação (4.6) são dados por

$$C_1 = \Gamma^\phi J_\alpha \quad (4.9)$$

$$C_2 = C_5 = -\Gamma^\phi J_\beta \quad (4.10)$$

$$C_4 = \Gamma^\phi J_\gamma , \quad (4.11)$$

onde α , β e γ são os coeficientes definidos nas Equações (2.15) a (2.17).

O sistema de equações diferenciais parciais escritas no plano transformado, que constitui o modelo para o problema da convecção natural laminar em cavidades é

Continuidade

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (4.12)$$

Movimento para u

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V u) = & -\frac{\partial P}{\partial \xi} y_{\eta} + \frac{\partial P}{\partial \eta} y_{\xi} \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial u}{\partial \xi}) + \hat{S}^u \end{aligned} \quad (4.13)$$

Movimento para v

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V v) = & -\frac{\partial P}{\partial \eta} x_{\xi} + \frac{\partial P}{\partial \xi} x_{\eta} \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial v}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial v}{\partial \xi}) + \hat{S}^v \end{aligned} \quad (4.14)$$

Energia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U T) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V T) = & \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi}) + \hat{S}^T \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nesse sistema de equações, toda a informação sobre a geometria é fornecida pelas componentes contravariantes do vetor velocidade e pelos coeficientes da transformação. O surgimento de gradientes extra de pressão nas equações de movimento traz algumas consequências que são discutidas no Capítulo 6.

4.4 - CONCLUSÕES E SUMÁRIO

Esse capítulo foi dedicado à exposição da transformação das equações governantes do sistema cartesiano para o sistema curvilíneo generalizado de coordenadas. As implicações inerentes à escolha das variáveis dependentes das equações de conservação da quantidade de movimento foram brevemente comentadas, culminando na fixação das velocidades cartesianas para esse fim [1]. Foi ressaltado que as equações no sistema transformado mantêm a sua forma

plenamente conservativa, exibindo uma estrutura similar àquelas de suas correspondentes cartesianas. Exceto para os termos que contêm derivadas cruzadas, os quais foram incluídos em termos fonte, o procedimento para a obtenção das equações governantes em diferenças finitas é similar àquele para coordenadas cartesianas.

CAPÍTULO 5

EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

5.1 - INTRODUÇÃO

Nesse capítulo obtém-se a aproximação em diferenças finitas das equações diferenciais parciais governantes no plano transformado. Existem várias alternativas para a localização das variáveis dependentes sobre os pontos da grade gerada no domínio de cálculos. Uma discussão a esse respeito pode ser encontrada em [1], da qual limita-se aqui a utilizar os resultados. Definido o arranjo de grade, obtém-se as aproximações das equações em diferenças finitas para um campo escalar genérico ϕ . Finalmente introduz-se as formas de avanço explícito e implícito para as variáveis dependentes das equações em diferenças finitas, e apresenta-se o sistema de equações discriminado para cada variável dependente.

5.2 - ARRANJO DE GRADE

O processo de obtenção das equações aproximadas em diferenças finitas requer a definição prévia do posicionamento das variáveis dependentes nas células elementares. O arranjo mais conveniente é aquele onde as velocidades u e v estão localizadas de modo coincidente nos centros das quatro faces dos volumes de controle para a continuidade (assim evita-se cálculos de médias para as velocidades que determinam os fluxos de massa) e, pressão, temperatura e propriedades físicas estão fixadas no centro desses volumes de controle (ver Figura 5.1) [1].

O arranjo para a pressão é mantido o mesmo daquele usual para sistemas ortogonais. Em consequência, quando uma grade ortogonal é usada, a equação para a pressão é simplificada. Essa equação é obtida no Capítulo 6 a partir das equações da continuidade e movimento. Como cada equação de movimento possui gradientes de pressão em duas direções coordenadas (ver Equações (4.13) e (4.14)) a equação para a pressão resulta em esquema de 9 pontos discretos

(ver Seção 6.6). No entanto, usando grades ortogonais, essa equação é simplificada para um esquema de 5 pontos, pois cada equação de movimento passa a apresentar gradiente de pressão numa única direção. A Figura 5.2 mostra os pontos envolvidos nos esquemas de 5 pontos (W, E, S, N, P) e 9 pontos (W, E, S, N, P, SW, SE, NW, NE). As observações anteriores permitem concluir que quanto mais próxima da ortogonal é a grade usada, tanto maior é a influência das pressões nos pontos W, E, S, e N, e tanto menor é a influência das pressões nos pontos SW, SE, NW e NE. Esse fato é de considerável importância, pois quando a malha tende para a ortogonalidade, a equação de pressão tende para o esquema de 5 pontos, e a não-ortogonalidade exerce influência na correta proporção de sua intensidade.

Note-se ainda que as velocidades estão localizadas exatamente nos pontos onde são necessárias para os balanços de massa sobre os volumes de controle elementares para a continuidade.

No Capítulo 4 apresentou-se o sistema de equações governantes com as equações de movimento escritas para as velocidades cartesianas como variáveis dependentes, caracterizando uma formulação u-v. A argumentação da Seção 4.2 indica um procedimento onde as velocidades contravariantes sejam fixadas como variáveis dependentes. Por outro lado, exprimir as equações de movimento unicamente em termos de velocidades contravariantes faz aumentar sensivelmente a sua complexidade [1]. Materializa-se, então, a conveniência de um procedimento do qual participem tanto as velocidades cartesianas quanto as contravariantes, definindo uma nova formulação, a qual é desenvolvida no Capítulo 6. Tal formulação, denominada formulação U-V, requer também o armazenamento das duas componentes contravariantes do vetor velocidade em cada face dos volumes de controle para a continuidade. A velocidade contravariante U é calculada nas faces oeste (w) e leste (e), e avaliada por médias nas faces sul (s) e norte (n). A velocidade contravariante V é calculada nas faces sul e norte, e avaliada por médias nas faces oeste e leste. A Figura 5.1 mostra o arranjo de grade onde tanto as componentes cartesianas do vetor velocidade, quanto suas componentes contravariantes estão localizadas; mostra ainda os volumes de controle elementares para as equações da continuidade, energia e movimento.

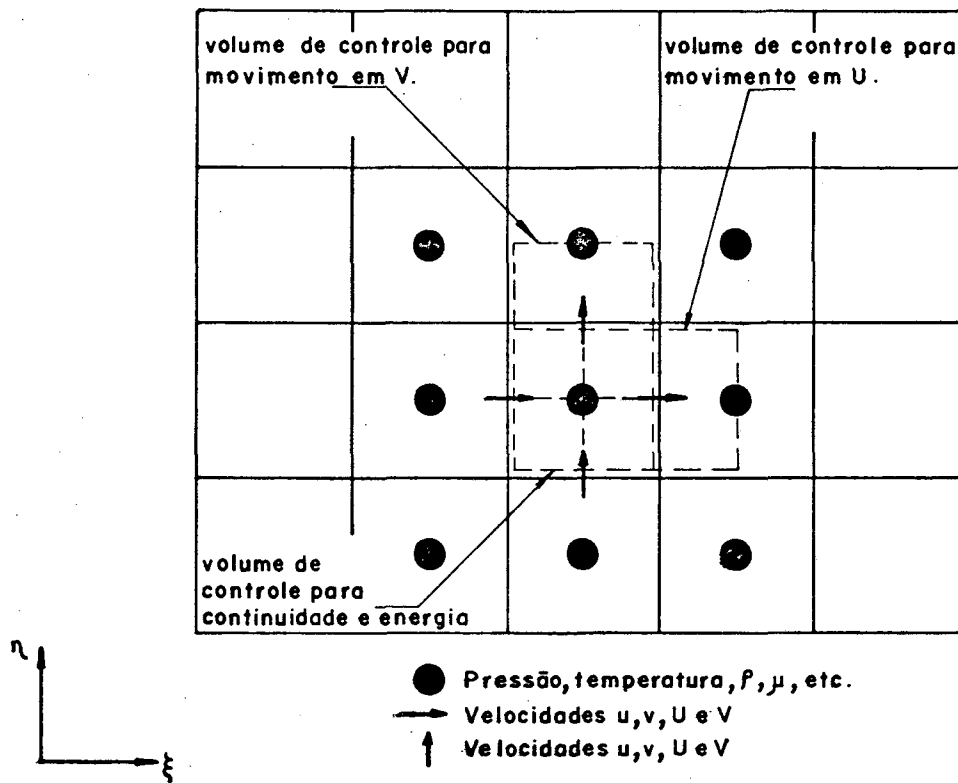


Figura 5.1 - Arranjo de grade utilizado.

5.3 - EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS NO PLANO TRANSFORMADO

Nesta seção são obtidas as equações governantes na forma de diferenças finitas para uma variável escalar genérica ϕ . Posteriormente é feita a identificação de ϕ como $1, u, v$, e T para caracterizar respectivamente as equações da continuidade, movimento para u e v , e energia. Resta ainda a equação para a pressão, cuja obtenção já em forma de diferenças finitas é feita no Capítulo 6, quando da discussão sobre o tratamento do acoplamento pressão-velocidade.

Por questão de conveniência, a Equação (4.6) é reescrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V\phi) + \tilde{p}\phi = \\ \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \hat{S}T\phi, \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde

$$\hat{S}T\phi = \hat{S}\phi + \frac{\partial}{\partial \xi}(C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) \quad (5.2)$$

A Equação (5.2) mostra o novo termo fonte que passa a conter os termos de derivadas cruzadas, evitando um esquema numérico de 9 pontos. O volume de controle elementar para ϕ é mostrado na Figura 5.2. Como já comentado, $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ são unitários por conveniência.

Existem alguns caminhos para a obtenção da Equação (5.1) aproximada em diferenças finitas. Um bom procedimento, e que aqui é adotado, é o conhecido Método do Volume de Controle [8]. Esse método executa a aproximação em diferenças finitas a partir da integração das equações de conservação sobre os volumes de controle elementares definidos no domínio de interesse. Um fato a destacar é a interpretação física associada a essa aproximação, pois, do mesmo modo que a equação em termos infinitesimais representa a conservação de propriedades sobre volumes de controle infinitesimais, a equação integrada representa a conservação das propriedades sobre volumes de controle finitos. E é fundamental para a convergência do modelo que as aproximações respeitem os princípios de conservação.

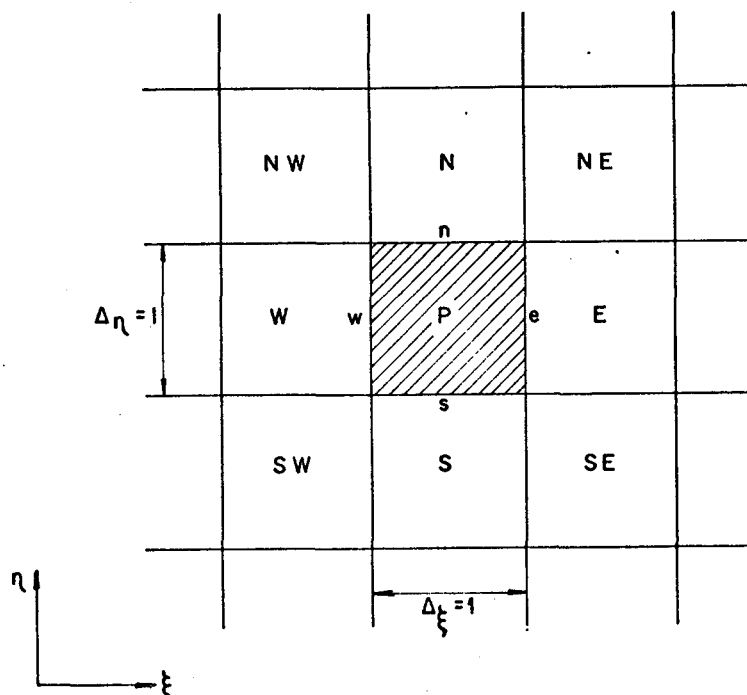


Figura 5.2 - Volume de controle elementar no plano transformado.

Integrando a Equação (5.1) no espaço e no tempo para o volume de controle mostrado na Figura 5.2, obtêm-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \{ [\rho\phi]^{t+\Delta t} - [\rho\phi]^t \} d\eta d\xi + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \{ [\rho U\phi]_e - [\rho U\phi]_w \} d\eta dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \{ [\rho V\phi]_n - [\rho V\phi]_s \} d\xi dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{P}\phi d\eta d\xi dt = \quad (5.3) \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \{ [C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}]_e - [C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}]_w \} d\eta dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \{ [C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}]_n - [C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}]_s \} d\xi dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{S}T\phi d\eta d\xi dt ,
 \end{aligned}$$

onde t é o nível de tempo, Δt é o avanço no tempo e os subscritos e , w , n e s são os pontos indicados na Figura 5.2. As aproximações a serem introduzidas na Equação (5.3) descrevem a variação de ϕ entre os pontos de grade e no intervalo de tempo Δt pela avaliação das integrais no espaço e no tempo.

Uma questão a decidir é a forma de apresentação da equação de conservação genérica em diferenças finitas. Como consequência do método aqui adotado para resolver o problema do acoplamento pressão-velocidade (método PRIME), as equações de movimento são resolvidas em forma explícita. Por outro lado, a equação de con-

servação de energia é resolvida implicitamente (ver Capítulo 6). A equação de conservação para ϕ é então apresentada na sequência, de maneira genérica para as formulações explícita, implícita ou híbrida. Assim, para obter-se a variação de ϕ no tempo, este é avaliado no tempo $t+\theta\Delta t$, e seu valor é o valor de ϕ sobre Δt . Por questão de conveniência, denota-se o nível $t+\Delta t$ por $n+1$, t por n e $t+\theta\Delta t$ por $n+\theta$, onde θ varia de zero a 1 e caracteriza a transição da formulação explícita para a totalmente implícita.

Para a aproximação dos termos convectivos e difusivos da Equação (5.3), adota-se o "Esquema de Diferenças Ponderadas a Montante" (Weighted Upstream Differencing Scheme - WUDS) de Raithby & Torrance [9]. As aproximações sobre as faces $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ são

Para os perfis de ϕ

$$\phi_e = \left[\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e\right]\phi_P + \left[\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e\right]\phi_E \quad (5.4)$$

$$\phi_w = \left[\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w\right]\phi_P + \left[\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w\right]\phi_W \quad (5.5)$$

$$\phi_n = \left[\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n\right]\phi_P + \left[\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n\right]\phi_N \quad (5.6)$$

$$\phi_s = \left[\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s\right]\phi_P + \left[\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s\right]\phi_S \quad (5.7)$$

Para os termos difusivos

$$C_{1\frac{\partial\phi}{\partial\xi}}|_e = C_{1e}\bar{\beta}_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta\xi} \quad (5.8)$$

$$C_{1\frac{\partial\phi}{\partial\xi}}|_w = C_{1w}\bar{\beta}_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta\xi} \quad (5.9)$$

$$C_{4\frac{\partial\phi}{\partial\eta}}|_n = C_{4n}\bar{\beta}_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta\eta} \quad (5.10)$$

$$C_{4\frac{\partial\phi}{\partial\eta}}|_s = C_{4s}\bar{\beta}_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta\eta} \quad (5.11)$$

onde $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são "pesos" determinados de acordo com a relativa intensidade entre os processos convectivos e difusivos no problema. Os subscritos indicam os pontos onde as quantidades devem ser avaliadas.

Allen & Southwell propuseram expressões para $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$, as quais foram modificadas por Raithby & Torrance [9], e hoje são ostensivamente usadas pelos analistas numéricos. Essas expressões podem ser usadas independente de a malha ser ortogonal ou não, pois são baseadas na solução unidimensional entre pontos de grade adjacentes para o problema de convecção-condução. As expressões originais são

$$\bar{\alpha}_e = \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{r_e/2}}{e^{r_e} - 1} \right) \quad (5.12)$$

$$\bar{\beta}_e = r_e \left(\frac{e^{r_e/2}}{e^{r_e} - 1} \right), \quad (5.13)$$

onde

$$r_e = \left(\frac{\rho U}{C_1} \right)_e, \quad (5.14)$$

que é o número de Peclet de grade baseado nas componentes contra-variantes do vetor velocidade.

Os valores $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sendo funções das velocidades, variam de ponto para ponto no domínio de cálculos. Está-se então adotando funções de interpolação variáveis na avaliação das variáveis dependentes e dos seus gradientes sobre as faces dos volumes de controle. Esse fato é de importância considerável, pois confere ao modelo a capacidade de adaptação à física específica de cada problema. Se as velocidades são pequenas, o esquema WUDS tende para o de "Diferenças Centrais" (Central Differencing Scheme - CDS), próprio para a modelagem de problemas de difusão predominante. Quando as velocidades crescem, o esquema WUDS tende para o de "Diferenças a Montante" (Upstream Differencing Scheme-UDS), próprio para o tratamento de problemas de convecção dominante. O esquema WUDS, devido a essas características, satisfaz plenamente à "propriedade de transporte" (transportive property) de Roache [8]. Uma análise comparativa envolvendo os esquemas acima referidos pode ser encontrada em Spalding [26].

Destaca-se aqui, que o único trabalho tratando do problema da convecção natural em cavidades arbitrárias do qual se tomou conhecimento durante o presente desenvolvimento (Patel & Briggs

[19]) executa todas as aproximações já mencionadas em diferenças centrais. Ainda, diga-se que o esquema CDS usado genericamente não obedece à "propriedade de transporte" de Roache. Esse esquema se torna tanto mais inadequado quanto maior for a predominância da convecção no problema físico sob consideração.

As expressões para $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ aqui usadas são as aproximações das Equações (5.12) e (5.13) dadas por Raithby [10]. São as seguintes

$$|\bar{\alpha}| = \frac{r^2}{10 + 2r^2} \quad (5.15)$$

$$\bar{\beta} = \frac{1 + 0,005r^2}{1 + 0,05r^2} \quad (5.16)$$

Executando a integração sujeita às condições assumidas, da Equação (5.3) resulta

$$\begin{aligned} \rho_P \phi_P^{n+1} \frac{\Delta V}{\Delta t} + A_P^* \phi_P^{n+\theta} &= A_e \phi_E^{n+\theta} + A_w \phi_W^{n+\theta} + A_n \phi_N^{n+\theta} \\ &+ A_s \phi_S^{n+\theta} + \rho_P \phi_P \frac{n \Delta V}{\Delta t} - L[\hat{P}^\phi] \Delta V + L[\hat{S}T^\phi] \Delta V, \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde ΔV é dado pelo produto entre $\Delta \xi$ e $\Delta \eta$. Os termos fonte e de pressão, $L[\hat{S}T^\phi]$ e $L[\hat{P}^\phi]$, são aproximados em diferenças centrais.

A equação da continuidade na forma de diferenças finitas

$$[(\rho U)_e - (\rho U)_w] \Delta \eta + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] \Delta \xi = 0 \quad (5.18)$$

foi usada para a obtenção da Equação (5.17). Os coeficientes A_i são dados por

$$A_e = -M_e \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) + \bar{\beta}_e D_e \quad (5.19)$$

$$A_w = M_w \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \bar{\beta}_w D_w \quad (5.20)$$

$$A_n = -M_n \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + \bar{\beta}_n D_n \quad (5.21)$$

$$A_s = M_s \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) + \bar{\beta}_s D_s \quad (5.22)$$

$$A_p^* = A_e + A_w + A_n + A_s, \quad (5.23)$$

onde a parte convectiva de cada coeficiente é dada por

$$M_e = (\rho U)_e^{n+\theta} \Delta \eta \quad (5.24)$$

$$M_w = (\rho U)_w^{n+\theta} \Delta \eta \quad (5.25)$$

$$M_n = (\rho V)_n^{n+\theta} \Delta \xi \quad (5.26)$$

$$M_s = (\rho V)_s^{n+\theta} \Delta \xi, \quad (5.27)$$

e a difusiva por

$$D_e = C_{1e} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (5.28)$$

$$D_w = C_{1w} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (5.29)$$

$$D_n = C_{4n} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (5.30)$$

$$D_s = C_{4s} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta}. \quad (5.31)$$

Na série de equações acima, apesar de $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$, esses são mantidos para facilitar a interpretação física de cada termo. As equações de conservação são resolvidas iterativamente e os avanços iterativos, por estarem relacionados aos termos transientes mantidos nas equações, são equivalentes a avanços no tempo.

Fazendo $\theta=0$ na Equação (5.17), esta passa a avançar a variável ϕ explicitamente. Se o mesmo avanço de tempo é considerado em todas as equações e para todo volume de controle do domínio de cálculos, a solução é obtida em transiente real. Entretanto, se apenas o regime permanente é procurado, aquela condição pode ser relaxada, passando-se a trabalhar com transientes distorcidos. Nesse caso, pode-se conseguir convergências muito mais rápi-

das.

Em formulações explícitas há uma restrição a observar em relação aos avanços iterativos das equações. Trata-se de um critério associado à necessidade de se ter todos os coeficientes da Equação (5.17) com o mesmo sinal. Essa condição, conhecida como "positividade dos coeficientes", é uma regra básica para o bom encaminhamento do processo numérico, evitando o possível surgimento de soluções distorcidas [20]. Para o estabelecimento desse critério, considere-se a Equação (5.17) escrita para formulação explícita

$$\begin{aligned} \phi_p^{n+1} = & [A_e \phi_E^n + A_w \phi_W^n + A_n \phi_N^n + A_s \phi_S^n] \frac{\Delta t}{\rho_p \Delta V} \\ & + \left[1 - \frac{\Delta t}{\rho_p \Delta V} A_p^* \right] \phi_p^n - L[\hat{P}\phi] \frac{\Delta t}{\rho_p} + L[\hat{S}\hat{T}\phi] \frac{\Delta t}{\rho_p} . \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para que o coeficiente grifado tenha o mesmo sinal dos demais é necessário que

$$\Delta t \leq \frac{\rho_p \Delta V}{A_p^*} = \Delta t_{\max} , \quad (5.33)$$

onde Δt é um avanço ao longo do tempo, e Δt_{\max} é o máximo avanço no tempo recomendado em formulação explícita. A Equação (5.33) é a condição para a positividade dos coeficientes.

Considere-se ainda a relação

$$\Delta t = E \Delta t_{\max} , \quad (5.34)$$

onde E é denominado avanço de tempo (ou avanço iterativo). Para obter-se transientes reais em formulação explícita, como já foi dito, Δt deve ser o mesmo para cada equação de conservação e para cada ponto da malha (Δt_{\max} é função de cada ponto). Assim, E deve ser variável (condição para transiente real) e no máximo igual à unidade (condição de positividade de coeficientes). Se é desejado apenas soluções permanentes, E pode ser especificado constan-

te.

Quando a formulação é implícita, a positividade dos coeficientes independe de E (ver Equação (5.38)), podendo este assumir valores acima da unidade em cálculos de transientes reais ou distorcidos.

Na aplicação do método PRIME (ver Capítulo 6), embora as equações de movimento sejam resolvidas "explicitamente", o problema da positividade dos coeficientes é contornado, permitindo avanços mais rápidos no processo numérico (valores de E maiores que a unidade). Para conseguir isso, formula-se as equações em uma forma explícita modificada. Em formulação explícita, para a avaliação dos perfis de ϕ e dos termos difusivos sobre as faces dos elementos de controle (Equações (5.4) a (5.11)) usa-se valores de ϕ do nível iterativo anterior. A modificação consiste em manter esse mesmo procedimento, exceto para o valor de ϕ sobre o ponto P, o qual é feito igual ao da própria iteração. Com isso pode-se assumir qualquer valor para E, pois independente dessa escolha, os sinais dos coeficientes serão sempre iguais. Essa medida impede a obtenção de transientes reais, posto que as aproximações espaciais sobre as faces dos volumes de controle utilizam valores de ϕ de níveis iterativos (de tempo) diferentes. Porém, ao assumir-se valores de avanço de tempo E maiores que a unidade, pode-se caminhar mais rapidamente para a solução em regime permanente, que é o presente objetivo.

A equação de energia é resolvida em formulação implícita, onde os valores de E podem ser assumidos maiores que a unidade.

O sistema de equações governantes em diferenças finitas é o seguinte

Continuidade

$$[(\rho U)_e - (\rho U)_w] \Delta \eta + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] \Delta \xi = 0 \quad (5.35)$$

Movimento para u

$$A_P u_P^{n+1} = A_e u_E^n + A_w u_W^n + A_n u_N^n + A_s u_S^n + \frac{A_P}{(1+E)} u_P^n - L[\hat{P}^u] \Delta V + L[\hat{S}^u] \Delta V \quad (5.36)$$

Movimento para v

$$A_P v_P^{n+1} = A_e v_E^n + A_w v_W^n + A_n v_N^n + A_s v_S^n + \frac{A_P}{(1+E)} v_P^n - L[\hat{P}^v] \Delta V + L[\hat{S}^u] \Delta V \quad (5.37)$$

Energia

$$A_P T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + \frac{A_P}{(1+E)} T_P^n + L[\hat{S}^T] \Delta V \quad (5.38)$$

onde

$$A_P = A_P^* + \rho_P \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (5.39)$$

Usando as Equações (5.33) e (5.34) obtém-se

$$\rho_P \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A_P^*}{E} \quad (5.40)$$

e

$$A_P = A_P^* \left(\frac{1 + E}{E} \right) \quad (5.41)$$

Como já mencionado anteriormente, há também a necessidade de uma equação para a pressão. Lembre-se aqui que foi assumida a hipótese de escoamentos incompressíveis. Assim, a equação da continuidade torna-se apenas uma restrição a ser satisfeita nos cálculos de velocidade (ρ é assumida constante nessa equação-aproximação de Boussinesq). A massa específica é modelada no termo forças de flutuação como função única da temperatura, e existem equações para as velocidades e para a temperatura. Não há, entretanto, uma equação para o avanço das pressões. Esta é obtida no Capítulo 6.

5.4 - CONCLUSÕES E SUMÁRIO

Nesse capítulo identificou-se o arranjo de grade usado. Teceu-se algumas considerações a respeito das localizações de pres

são e velocidades, as quais serviram como introdução para a formulação U-V a ser apresentada no capítulo seguinte. Nesse procedimento, tanto as velocidades cartesianas quanto as contravariantes são armazenadas em cada face dos volumes de controle para a continuidade. Aproximou-se a equação governante escrita para ϕ em diferenças finitas usando o método do volume de controle, obtendo-a em termos genéricos para as formulações implícita, explícita ou híbrida. As aproximações foram feitas utilizando o esquema WUDS, o qual permite ao modelo adaptar-se à física do problema a resolver, e obedece à "propriedade de transporte" de Roache. Comentou-se ainda que o método PRIME resolve as equações de movimento escritas em uma forma explícita alterada, a qual impossibilita a obtenção de transientes reais (não é o objetivo presente), mas permite a utilização de valores de avanço de tempo Δt maiores que a unidade. Pode-se assim trabalhar com altas velocidades de convergência na busca de soluções em regime permanente.

CAPÍTULO 6

ALGORITMO DE SOLUÇÃO

6.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo precedente foram obtidas as equações governantes no plano transformado em forma de diferenças finitas. Naquele procedimento as velocidades cartesianas u e v foram mantidas como variáveis dependentes nas equações de conservação da quantidade de movimento, caracterizando uma formulação $u-v$.

Esse capítulo inicia com a obtenção das equações em formulação $U-V$. Com o sistema de equações algébricas governantes em mãos, parte-se para sua solução, considerando as não-linearidades e acoplamentos existentes. Nesse sentido, discute-se a questão da formulação incompressível considerada nesta dissertação, a qual torna dificultosa a solução do acoplamento pressão-velocidade. Expõe-se um método para tratar desse acoplamento (método PRIME), apresentando suas equações próprias para correção de velocidades e atualização de pressão em processo iterativo.

Nesse capítulo faz-se a apresentação do procedimento para a solução do sistema de equações governantes, recorrendo-se ainda sobre alguns detalhes numéricos importantes associados ao uso do sistema curvilíneo generalizado de coordenadas. Aborda-se ainda a questão das condições de contorno para as equações governantes. Finalizando, considera-se alguns detalhes gerais de relevância à cerca do processo de solução (testes de convergência, fatores de relaxação, etc).

6.2 - FORMULAÇÃO $U-V$

As equações de conservação da quantidade de movimento, escritas para as velocidades cartesianas (formulação $u-v$) são

$$A_P u_P = A_e^u u_E + A_w^u u_W + A_n^u u_N + A_s^u u_S + B_P^u - \left[\frac{\Delta P}{\Delta \xi} y_\eta \right]_P + \left[\frac{\Delta P}{\Delta \eta} y_\xi \right]_P \quad (6.1)$$

$$A_P^V v_P = A_e^V v_E + A_w^V v_W + A_n^V v_N + A_s^V v_S + B_P^V - \quad (6.2)$$

$$\left[\frac{\Delta P}{\Delta \eta} x_\xi \right]_P + \left[\frac{\Delta P}{\Delta \xi} x_\eta \right]_P ,$$

onde

$$B_P^u = A_P^u \frac{u_P}{1+E} + L[\hat{S}T^u]_P \Delta V \quad (6.3)$$

$$B_P^v = A_P^v \frac{v_P}{1+E} + L[\hat{S}T^v]_P \Delta V . \quad (6.4)$$

A Equação (5.35) da continuidade está escrita para as velocidades contravariantes que definem o fluxo de massa através dos elementos de controle. Incide, portanto, apenas sobre uma das componentes contravariantes do vetor velocidade em cada face dos volumes de controle para a continuidade. A Figura 6.1 ilustra esta situação. Por outro lado, as equações de movimento (Equações (6.1) e (6.2)) determinam, em cada face, ambas as componentes cartesianas da velocidade. Deste modo, as equações de movimento definem um vetor enquanto a continuidade age apenas sobre uma de suas componentes. Essa inconsistência permite que os cálculos conduzam a velocidades incorretas, gerando soluções irreais.

O problema é eliminado ao se expressar as equações de movimento em termos de velocidades contravariantes. Nesse caso, sobre cada face do volume de controle resolve-se apenas uma das equações de movimento: aquela escrita para a velocidade sujeita à continuidade. A consistência dessa formulação resulta de que as equações de conservação da quantidade de movimento e da continuidade estão escritas para as mesmas variáveis dependentes.

Para obter as equações de movimento em formulação U-V, combina-se as Equações (6.1) e (6.2) de acordo com as Equações (4.7) e (4.8). Desse procedimento resulta

$$U_P = \tilde{U}_P - \left[\frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\alpha}{A_P} \right]_P + \left[\frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\beta}{A_P} \right]_P \quad (6.5)$$

$$V_P = \tilde{V}_P - \left[\frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\gamma}{A_P} \right]_P + \left[\frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\beta}{A_P} \right]_P , \quad (6.6)$$

onde \hat{U}_P e \hat{V}_P são dados por

$$\begin{aligned} \hat{U}_P = & \frac{A_e^U}{A_P^U} [u_E y_{\eta P} - v_E x_{\eta P}] + \frac{A_w^U}{A_P^U} [u_W y_{\eta P} - v_W x_{\eta P}] + \\ & \frac{A_n^U}{A_P^U} [u_N y_{\eta P} - v_N x_{\eta P}] + \frac{A_s^U}{A_P^U} [u_S y_{\eta P} - v_S x_{\eta P}] + \frac{B_P^U}{A_P^U} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_P = & \frac{A_e^V}{A_P^V} [v_E x_{\xi P} - u_E y_{\xi P}] + \frac{A_w^V}{A_P^V} [v_W x_{\xi P} - u_W y_{\xi P}] + \\ & \frac{A_n^V}{A_P^V} [v_N x_{\xi P} - u_N y_{\xi P}] + \frac{A_s^V}{A_P^V} [v_S x_{\xi P} - u_S y_{\xi P}] + \frac{B_P^V}{A_P^V} , \end{aligned} \quad (6.8)$$

e os novos termos fonte são dados por

$$B_P^U = B_P^u y_{\eta P} - B_P^v x_{\eta P} \quad (6.9)$$

$$B_P^V = B_P^v x_{\xi P} - B_P^u y_{\xi P} , \quad (6.10)$$

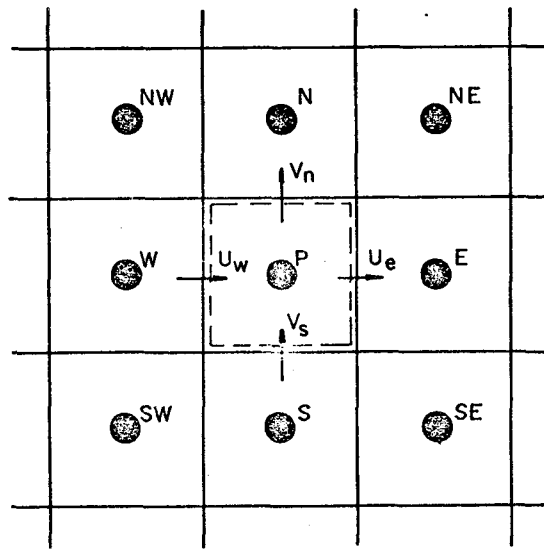


Figura 6.1 - Volume de controle para a continuidade e componentes contravariantes do vetor velocidade.

onde o subscrito P nas "métricas" indica que estas são avaliadas no ponto P. Completam o conjunto de equações governantes, as Equações (5.35) para a continuidade e (5.38) para a conservação de energia, além da equação para a pressão, que é obtida na Seção 6.6.

Convém observar que os coeficientes da equação de conservação genérica (Equação (5.17)) são os mesmos independente de qual seja a variável dependente. Assim, em cada volume de controle para V, $A_P^u = A_P^v = A_P^V$; e em cada volume de controle para U, $A_P^u = A_P^v = A_P^U$ (ver Figura 5.1).

Uma formulação puramente contravariante implicaria na eliminação de todas as velocidades cartesianas ainda presentes nas Equações (6.7) e (6.8). Isso poderia ser efetivado utilizando as relações

$$u = J(Ux_\xi + Vx_\eta) \quad (6.11)$$

$$v = J(Uy_\xi + Vy_\eta) \quad (6.12)$$

No entanto, em assim fazendo estar-se-ia gerando equações muito complicadas, e com complexos e extensos termos fonte [1]. Diante disso, as Equações (6.7) e (6.8) são mantidas em favor da simplicidade e estabilidade numérica. O preço a ser pago é a armazenagem adicional das velocidades cartesianas. Maiores detalhes a esse respeito, bem como exemplos bem sucedidos na utilização desta formulação podem ser encontrados em [1].

6.3 - FORMULAÇÃO INCOMPRESSÍVEL

Considere-se a Equação (3.1) escrita para um campo escalar ϕ , onde ϕ representa qualquer propriedade transportada. A modelagem de um problema fluido-térmico bidimensional envolve 4 equações: continuidade, 2 de movimento e energia. As incógnitas, em número de 5, são: massa específica (ρ), pressão (P), temperatura (T) e duas componentes de velocidade. Se ρ varia consideravelmente no domínio, então uma equação de estado relacionado pressão, massa específica e temperatura provê a relação adicional necessária. Esta pode ser compreendida como uma equação para pressão,

enquanto a continuidade é uma equação para a massa específica. Essa formulação, onde cada variável tem sua equação própria, é conhecida como compressível.

Se a densidade varia muito pouco com a pressão, mas ainda varia significativamente com a temperatura no domínio, a rigor, o problema pode ainda ser classificado como compressível. Contudo, essa formulação torna-se inadequada do ponto de vista numérico. Acontece que pequenos erros ocorridos nos cálculos de massa específica através da equação da continuidade, implicam no surgimento de erros consideráveis nos cálculos de pressão via equação de estado $P=P(\rho,T)$. Isso ocorre exatamente porque a dependência de ρ em relação a P é insignificante, e portanto, a utilização de ρ para avaliar P não pode oferecer resultados precisos. Introduzindo o campo de pressões daquela forma calculado nas equações de movimento, e retornando com as velocidades obtidas à equação da continuidade, determina-se novos valores de massa específica para o próximo ciclo iterativo. Esse processo de propagação de erros faz surgir instabilidades na solução numérica da série de equações [1]. Como ρ não depende da pressão, é óbvio que a equação de estado deve relacioná-la apenas à temperatura, estabelecendo-se $\rho=\rho(T)$, com T provida pela equação de energia. Esta é agora a equação para a massa específica. Quanto à equação da continuidade, passa a ser uma restrição a ser satisfeita através da escolha dos gradientes de pressão que acoplam as equações de movimento. A dificuldade que surge é a inexistência de uma equação para a pressão. A questão é encontrar um campo de pressões que dê origem a campos de velocidades que satisfaçam a continuidade.

Em outras palavras, essa nova formulação, dita incompressível, introduz um acoplamento entre pressão e velocidade de difícil tratamento. A próxima seção ocupa-se da exposição do método PRIME, que é a técnica aqui utilizada na manipulação desse acoplamento.

6.4 - PROCEDIMENTO PARA A MANIPULAÇÃO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE NAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

O tratamento do acoplamento pressão-velocidade introduzido no método PRIME (update Pressure Implicitly and Momentum Expli-

citly) é utilizado neste trabalho. O método, devido à V.Doormaal & Raithby [12], simplifica consideravelmente o ciclo iterativo, eliminando o procedimento usual em "dois passos" (neste, resolve-se inicialmente as equações de movimento, em ciclo iterativo, para um dado campo de pressões. Em seguida resolve-se, também iterativamente, uma equação para a pressão. Com o campo de pressões avançado volta-se às equações de movimento). No método PRIME, há um único ciclo iterativo para os cálculos de pressão, sendo as velocidades obtidas através de um conjunto de equações algébricas sempre que o campo de pressões é avançado.

As equações de conservação da quantidade de movimento, considerando aproximações de segunda ordem para os gradientes de pressão nas Equações (6.5) e (6.6), são

$$U_P = \hat{U}_P - \left[\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right]_P (P_E - P_P) + \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right]_P (P_{NE} + P_N - P_{SE} - P_S) \quad (6.13)$$

$$V_P = \hat{V}_P - \left[\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right]_P (P_N - P_P) + \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right]_P (P_{NE} + P_E - P_{NW} - P_W) \quad (6.14)$$

onde as velocidades da iteração anterior são utilizadas para avaliar \hat{U}_P e \hat{V}_P através das Equações (6.7) e (6.8). Inserindo as Equações (6.13) e (6.14) na equação da continuidade, obtém-se uma equação de Poisson para a pressão (ver Seção 6.6). Esse é o procedimento PUP (Pressure Updating Patankar scheme) desenvolvido por S.V. Patankar e descrito em [11]. O método PUP no entanto, só avança o campo de pressões, havendo a necessidade de um outro procedimento para a correção do campo de velocidades. O método PRIME utiliza a metodologia PUP e faz o avanço das velocidades através das Equações algébricas (6.13) e (6.14), não necessitando de um procedimento adicional para isso. A solução obtida para a pressão é usada diretamente naquelas equações corrigindo as velocidades, e é reconhecida como o campo de pressões avançado. Em PUP esse campo é apenas um incremento a ser dado na pressão.

No procedimento PRIME resolve-se apenas uma equação do tipo Poisson. A solução é encontrada em processo iterativo semelhante ao de Jacobi, sendo que, após cada varredura no campo de velocidades é feito o avanço do campo de pressões. Essa técnica tem provado eficiência para uma série de problemas hidrodinâmicos. Algumas destas soluções e maiores detalhes a respeito do método PRIME podem ser encontrados em [1].

6.5 - PROCEDIMENTO PARA A SOLUÇÃO DA SÉRIE DE EQUAÇÕES USANDO O MÉTODO PRIME

Adotando-se o procedimento PRIME, o processo iterativo apresenta-se bastante simples, sendo resolvida apenas uma equação de Poisson a cada ciclo, como já comentado. O campo de pressões obtido é usado para corrigir velocidades tal que a massa seja conservada, e é tomado como o campo de pressões avançado para o próximo ciclo iterativo, como já mencionado. Os passos para um ciclo iterativo completo são

- (1) - Arbitrar os campos de pressão $P(\xi, \eta)$, de temperatura $T(\xi, \eta)$, e de velocidades $u(\xi, \eta)$ e $v(\xi, \eta)$ no domínio;
- (2) - Calcular os coeficientes para as equações governantes;
- (3) - Achar T resolvendo a equação de conservação de energia, Equação (5.38);
- (4) - Achar \hat{U} e \hat{V} usando as Equações (6.7) e (6.8);
- (5) - Resolver a equação de Poisson para a pressão, Equação (6.21);
- (6) - Corrigir U e V usando as Equações (6.5) e (6.6);
- (7) - Calcular U e V onde não são exigidos para satisfazer a continuidade, usando as Equações (6.15) e (6.16) abaixo. Ver Figura 6.2;

$$U = (U_A + U_B + U_C + U_D) * 0,25 \quad (6.15)$$

$$V = (V_A + V_B + V_C + V_D) * 0,25 \quad (6.16)$$

- (8) - Calcular as velocidades u e v usando as Equações (6.11) e (6.12).

Para considerar as não linearidades e o acoplamento entre as equações, do passo (8) volta-se ao (2) até a convergência, fechando o ciclo iterativo.

A próxima seção é dedicada à obtenção da equação de Poisson para a pressão e de seus coeficientes.

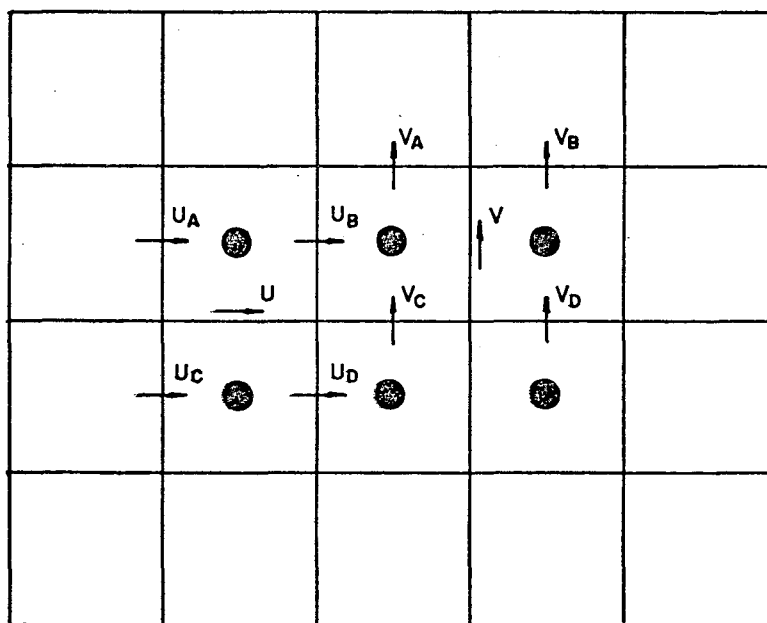


Figura 6.2 - Determinação das componentes contravariantes não exigidas para satisfazer a restrição da continuidade.

6.6 - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON PARA A PRESSÃO

A equação de Poisson para a pressão, como já referido, é obtida inserindo as Equações (6.13) e (6.14) na Equação (5.35) da continuidade. Esse procedimento é classificado por Raithby & Schneider [11] como "ativo", visto que força a obtenção de "velocidades corretas", cujos valores são impelidos a satisfazer as equações de movimento (Em [11] os métodos para solução do acoplamento pressão-velocidade são classificados como ativos ou passivos, dependendo de quão fortemente as velocidades corrigidas aproximam-se daquelas que satisfazem as equações de movimento).

Observe-se a Figura 6.1, onde é mostrado um volume de controle interno centrado no ponto P, e sobre o qual a equação de conservação da massa é aplicada. Do balanço de massa participam

$$U_e = \hat{U}_e - \left[\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right]_e (P_E - P_P) + \left[\frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right]_e (P_{NE} + P_N - P_{SE} - P_S) \quad (6.17)$$

$$U_w = \hat{U}_w - \left[\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right]_w (P_P - P_W) + \left[\frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right]_w (P_{NW} + P_N - P_{SW} - P_S) \quad (6.18)$$

$$V_n = \hat{V}_n - \left[\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right]_n (P_N - P_P) + \left[\frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right]_n (P_{NE} + P_E - P_{NW} - P_W) \quad (6.19)$$

$$V_s = \hat{V}_s - \left[\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right]_s (P_P - P_S) + \left[\frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right]_s (P_{SE} + P_E - P_{SW} - P_W) \quad (6.20)$$

Inserindo as Equações (6.17) a (6.20) na Equação (5.35) da continuidade, obtém-se

$$A_P P_P = A_e P_E + A_w P_W + A_n P_N + A_s P_S + A_{ne} P_{NE} + A_{nw} P_{NW} + A_{se} P_{SE} + A_{sw} P_{SW} + B, \quad (6.21)$$

onde

$$A_P = \left(\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_w + \left(\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_e + \left(\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_n + \left(\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_s \quad (6.22)$$

$$A_e = \left(\frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_e + \left(\frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s - \left(\frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (6.23)$$

$$A_w = \left(-\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_w - \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s + \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (6.24)$$

$$A_n = \left(-\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_n + \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w - \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e \quad (6.25)$$

$$A_s = \left(-\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_s - \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w + \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e \quad (6.26)$$

$$A_{ne} = - \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e - \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (6.27)$$

$$A_{se} = \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e + \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (6.28)$$

$$A_{nw} = \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w + \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (6.29)$$

$$A_{sw} = - \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w - \left(-\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (6.30)$$

$$B = \nabla \cdot \hat{\vec{V}} = \hat{U}_w - \hat{U}_e + \hat{V}_s - \hat{V}_n \quad (6.31)$$

Os coeficientes acima são válidos para volumes de controle para a continuidade não localizados nas fronteiras. Os coeficientes para os elementos de fronteira são obtidos da mesma maneira, devendo-se observar entretanto as condições de contorno existentes nestas fronteiras. Esses coeficientes, para o caso de fluxo de massa prescrito, são dados no Apêndice D.

Inspecionando os coeficientes listados acima, nota-se que

$$A_p = A_e + A_n + A_w + A_s \quad (6.32)$$

e

$$A_{ne} + A_{nw} + A_{se} + A_{sw} = 0 \quad (6.33)$$

A pressão num ponto P está, então, fortemente ligada aos quatro pontos circunvizinhos paralelos (W, E, S, N), e fracamente ligada aos diagonais (SW, SE, NW, NE). Esse é o mesmo tipo de estrutura exibida pela equação de Poisson para a pressão referenciada à sistemas de coordenadas ortogonais. Tal similaridade estrutural é a razão pela qual essa equação de Poisson à 9 pontos apresenta taxa de convergência semelhante àquela para malhas ortogonais à 5 pontos [1]. Ainda, note-se nas Equações (6.22) a (6.30) que quando a malha é ortogonal (e portanto $\beta=0$), os coeficientes reduzem-se àqueles para quaisquer sistemas de coordenadas ortogonais.

A essa altura, abre-se um parêntese para confrontação da metodologia aqui considerada para os cálculos de pressão, com aquela utilizada por Patel & Briggs [19]. Estes utilizaram o arranjo de grade da Figura 6.3(a) para resolver o problema da convecção natural em cavidades irregulares. A restrição da continuidade é forçada nos volumes de controle achurrados, e as pressões são avaliadas nos pontos indicados. A equação de movimento é resolvida para ambas as componentes contravariantes da velocidade em cada ponto. O campo de pressões é avaliado por uma equação de Poisson obtida de maneira idêntica à considerada nesta dissertação. Na Figura 6.3(b), mostra-se em comparação, o arranjo de grade aqui utilizado (ver Capítulo 5), em que a restrição da continuidade é forçada apenas para parte das velocidades contravariantes (aquelas para as quais a equação de movimento é resolvida), sendo as demais avaliadas por médias aritméticas, como mostrado na Figura 6.2. Em relação ao presente estudo, [19] utiliza quase o dobro do número de pontos de pressão. E, como é sabido, a equação de Poisson de pressão é dominante em termos de tempo computacional. Patel & Briggs afirmam que o fato de se considerar um maior número de pontos de pressão implica em maior precisão na avaliação dos gradientes de pressão presentes nas equações de movimento. Porém, diga-se que utilizando no presente trabalho o mesmo número de pontos de pressão de [19], estar-se-ia considerando uma malha duas vezes mais fina, e o tempo de computação seria o mesmo. Observe-se ainda que quando a malha utilizada em [19] é ortogonal, são obtidas sobre o mesmo domínio duas soluções completamente desacopladas entre si.

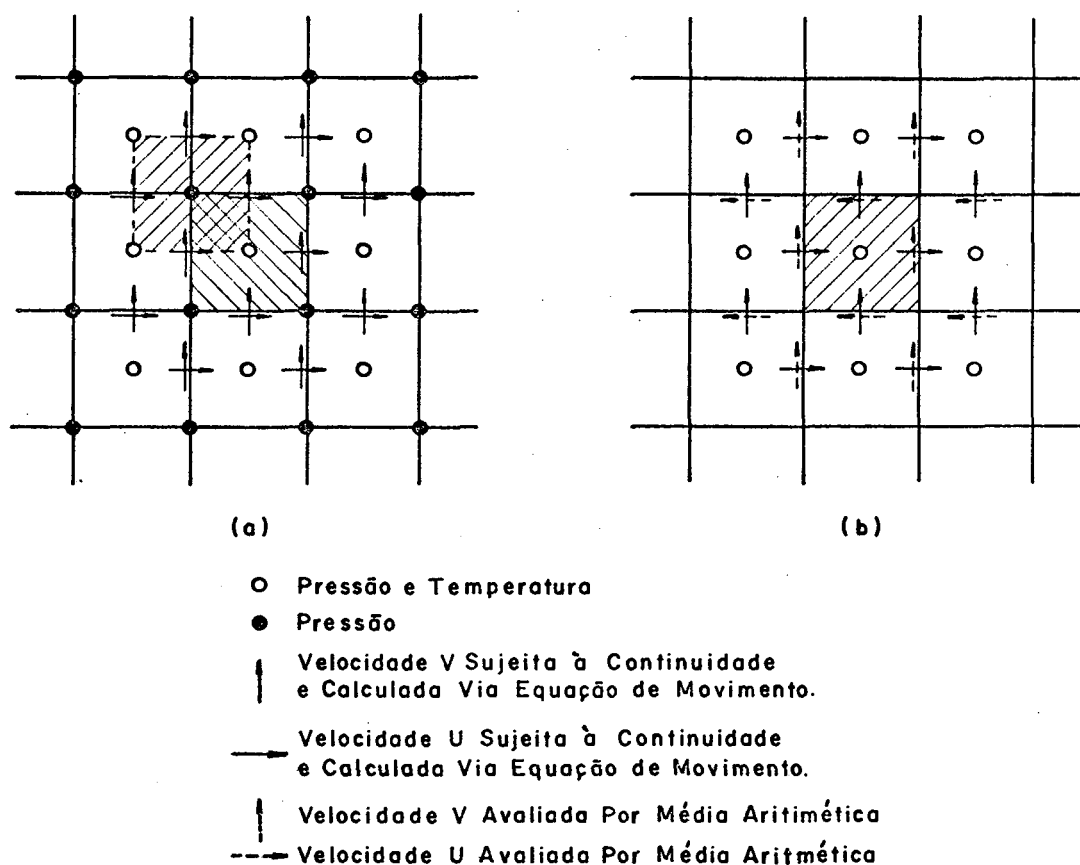


Figura 6.3 - Arranjos de grade: (a) - Patel & Briggs;
 (b) - Assumido neste trabalho.

6.7 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA VELOCIDADE NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

Considere-se uma região física simplesmente conexa qualquer transformada para um domínio retangular, o qual é associado a um sistema de coordenadas (ξ, η) . Neste caso, as condições de contorno a serem aplicadas no domínio transformado são as mesmas encontradas nos quatro segmentos físicos escolhidos para serem mapeados sobre os quatro lados do retângulo no sistema (ξ, η) .

A Figura 6.4 mostra os pontos de fronteira de velocidade, pressão e temperatura. Na especificação das condições de contorno para velocidade usa-se aqui a técnica de pontos fictícios. Nos casos da pressão e temperatura, essa técnica não é utilizada. Tal medida é justificada na seção seguinte. A aplicação das condições de contorno para velocidade, por exemplo, na fronteira es

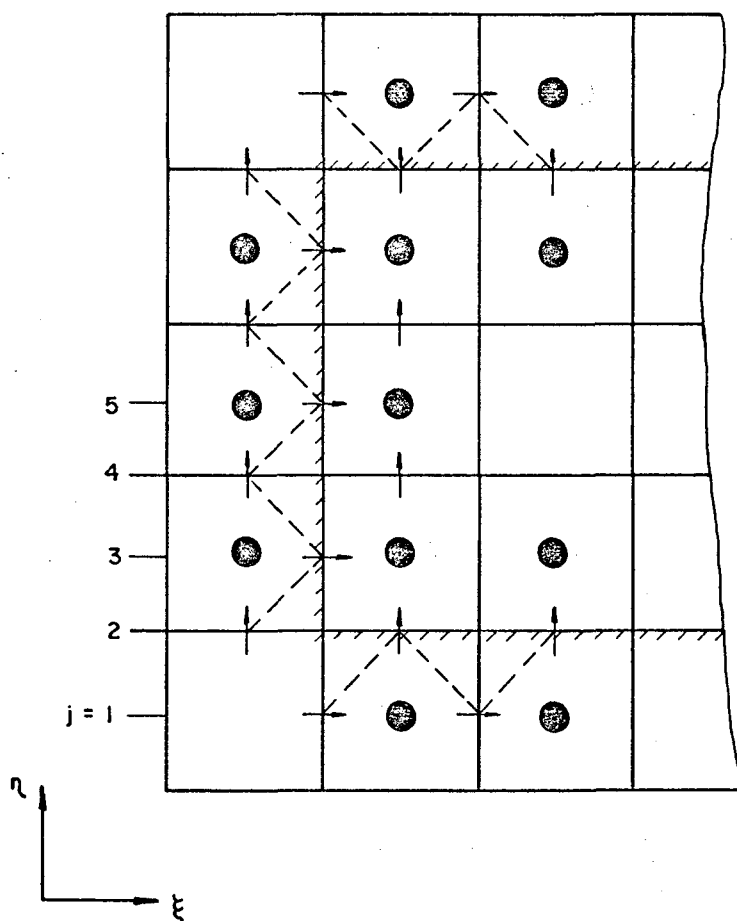


Figura 6.4 - Aplicação das condições de contorno para velocidades em domínios simplesmente conexos.

querda do domínio transformado da Figura 6.4, é feita segundo a equação

$$\phi_N = AX \phi_{N-1} + BX \quad , \quad (6.34)$$

onde ϕ_N localiza-se na parede se $j = 3, 5, 7, \dots$, e fora da fronteira se $j = 2, 4, 6, \dots$, como indicado na Figura 6.4. Os valores de AX e BX consideram o tipo de condição de contorno, que no caso presente é de fluxo de massa prescrito (nulo). Devido ao fato de tanto as velocidades cartesianas quanto as contra-variantes tomarem parte no esquema numérico de solução, as condições de contorno devem ser especificadas para ambas, sobre os pontos ligados pelas linhas tracejadas da Figura 6.4, do seguin-

te modo

- (a) - Para os pontos de $j = 2, 4, 6, \dots$, aplica-se condições de contorno para V, u e v .
- (b) - Para os pontos de $j = 3, 5, 7, \dots$, aplica-se condições de contorno para U, u e v .

A aplicação de condições de contorno para as outras três fronteiras do domínio transformado é feita exatamente da mesma maneira como descrito para o lado esquerdo.

6.8 - PONTOS FICTÍCIOS PARA TEMPERATURA E PRESSÃO

O uso de pontos fictícios para temperatura e pressão é muito conveniente porque permite a utilização de uma única equação para representar todos os elementos do domínio. Diga-se entretanto, que os pontos fictícios são completamente dispensáveis em qualquer esquema de solução. Eles são usados por mera conveniência na aplicação das condições de contorno.

Ao se tratar com sistemas de coordenadas curvilíneas generalizadas no entanto, surgem inconvenientes quanto à consideração de pontos fictícios para temperatura e pressão. Essas questões são agora abordadas.

A - PONTOS FICTÍCIOS PARA TEMPERATURA

A utilização de pontos fictícios para a solução de problemas referenciados à sistemas de coordenadas ortogonais é um procedimento trivial. Nesses casos, tanto as condições de Dirichlet quanto as de Neumann são de simples determinação, em aproximações de primeira ou segunda ordem. Entretanto, quando se está trabalhando com sistemas generalizados de coordenadas, as condições de Neumann assumem uma feição problemática ao se tentar aplicar a técnica de pontos fictícios. A dificuldade consiste no fato de que uma expressão obtida para representar derivadas normais às fronteiras (como de resto, a qualquer linha coordenada) conteria termos de derivada nas duas direções coordenadas (ver Equação (7.3)). Ou seja, derivadas parciais da temperatura com

respeito a ξ e η . Ter-se-ia então, com a especificação de condições de contorno de Neumann, uma relação de dependência entre estas duas derivadas nos pontos de fronteira. O resultado disso seria, para a fronteira mostrada na Figura 6.5 por exemplo, que na determinação da temperatura no ponto fictício N estariam envolvidos os pontos NW e NE, que também são fictícios, além dos pontos P, W e E. Este aparenta ser um procedimento duvidoso, em se tratando do fato extremamente crucial que é a aplicação das condições de contorno. Diante disso, optou-se pela consideração das condições de contorno para temperatura através de balanços de energia para todas as fronteiras, seja qual for o tipo de condição de contorno especificada. Os detalhes desses balanços, e as equações de fronteira obtidas são apresentados no Apêndice E.

B - PONTOS FICTÍCIOS PARA PRESSÃO

Devido ao fato de as equações de movimento apresentarem gradientes de pressão em ambas as direções do sistema de coordenadas generalizado, torna-se necessário definir a maneira de avaliação destes gradientes quando os volumes de controle para velocidade estão situados nas fronteiras. Fora das fronteiras o procedimento é trivial. Considere-se a Figura 6.5, onde é representado um volume de controle para a velocidade U junto à fronteira superior. Se o sistema de coordenadas é não-ortogonal, β é diferente de zero, e torna-se necessário avaliar $\partial P / \partial \eta$ no ponto 3 (ver Equação (6.5)). Uma maneira de fazê-lo seria pela utilização dos pontos fictícios N e NE, sendo o gradiente calculado da mesma maneira que o é fora das fronteiras. Reaparece aqui a questão levantada na avaliação do uso de pontos fictícios para temperatura. Há então que se encontrar um meio alternativo para avaliar gradientes de pressão nas fronteiras. Este é o assunto da próxima seção.

No caso da pressão, há uma implicação adicional que surge quando da solução da equação de Poisson. É que, mesmo que fossem obtidos todos os pontos fictícios para pressão, não seria possível aplicá-los porque não se tem equações de movimento para velocidades localizadas nas fronteiras. Tais equações seriam necessárias porque seus coeficientes A_p para velocidade aparecem nos

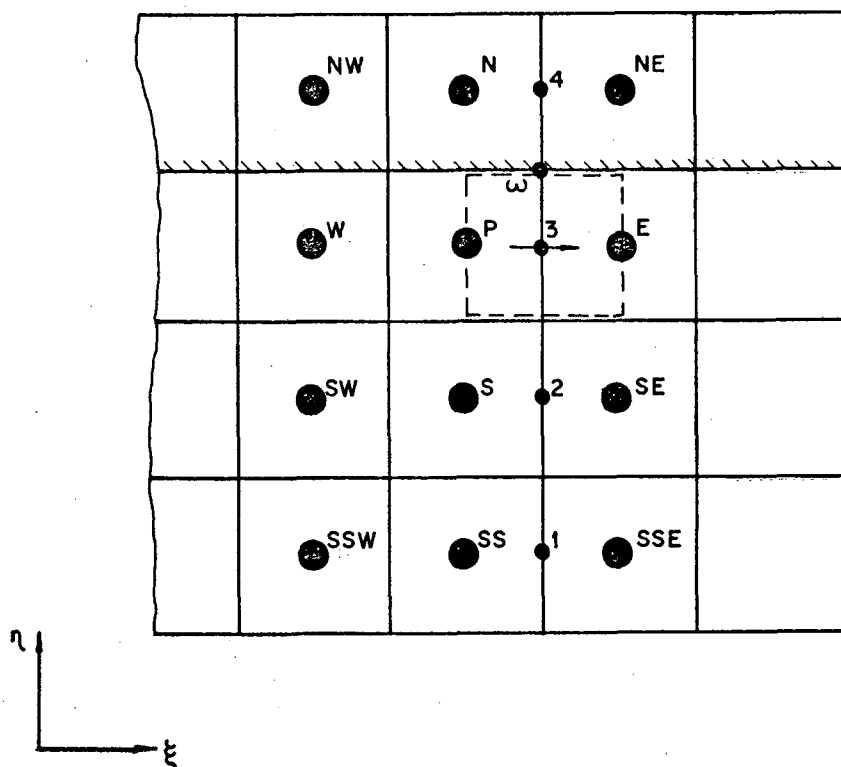


Figura 6.5 - Volume de controle para velocidade U junto à fronteira. Cálculo de $\partial P / \partial \eta$ na parede.

coeficientes da equação para pressão. Na solução desta equação é então impraticável a utilização de pontos fictícios.

Este impedimento, entretanto, não causa problemas. No procedimento aqui adotado as condições de contorno para a pressão são incorporadas dentro dos próprios coeficientes da equação de Poisson para as fronteiras. No caso, as equações de movimento são combinadas nas fronteiras às velocidades prescritas através da equação da continuidade, resolvendo automaticamente o problema de contorno para a pressão. Os coeficientes de fronteira, como já mencionando, são determinadas no Apêndice D.

A aplicação da técnica de pontos fictícios não implica em maior precisão na consideração das condições de contorno. Tanto para pressão quanto para temperatura, na determinação das equações especiais de fronteira, as condições físicas do problema são rigorosamente observadas.

6.9 - AVALIAÇÃO DO GRADIENTE DE PRESSÃO PARA VOLUMES DE CONTROLE DE VELOCIDADE LOCALIZADOS NAS FRONTEIRAS

Excluída a opção da utilização de pontos fictícios para avaliar o gradiente $\partial P / \partial \eta$ no ponto 3 da Figura 6.5, resta agora estabelecer outro meio de obtê-lo. Para efeitos de precisão e consistência com a aproximação usada nos pontos interiores, a avaliação desse gradiente é feita em aproximação de segunda ordem. Dos cálculos em diferenças finitas, sabe-se que um perfil de segunda ordem ajusta os pontos discretos de maneira adequada à obtenção de uma aproximação para derivadas. A Figura 6.6 mostra os pontos da Figura 6.5 em um gráfico $P \times \eta$. Os três pontos usados para ajustar o perfil de segunda ordem são os pontos w (parede), 3 e 2. Esta é a aproximação utilizada por Maliska [1]. O perfil é dado por

$$P(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 \quad (6.35)$$

Eliminando as constantes pelo uso das pressões nos pontos 2 e 3, e do gradiente de pressão na parede, obtém-se

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_3 = \frac{P_3 - P_2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_w \quad (6.36)$$

onde $\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_3$ é o gradiente de pressão necessário para ser inserido na Equação (6.5) de movimento. Admitindo-se uma aproximação de primeira ordem para $\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_3$, o último termo da Equação (6.36) desaparece. No entanto, como é desejado o uso de uma aproximação de segunda ordem, o termo $\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_w$ deve ser avaliado. Para tanto, é aqui considerada nova aproximação parabólica, como feito em [1]. Considere-se a Figura 6.6, onde uma parábola é assumida como passando através dos pontos 3, 2 e 1. Utilizando as pressões nestes pontos para determinar as constantes a_0 , a_1 e a_2 , obtém-se

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_w = a_1 \quad (6.37)$$

onde

$$a_1 = 2P_3 + P_1 - 3P_2 \quad (6.38)$$

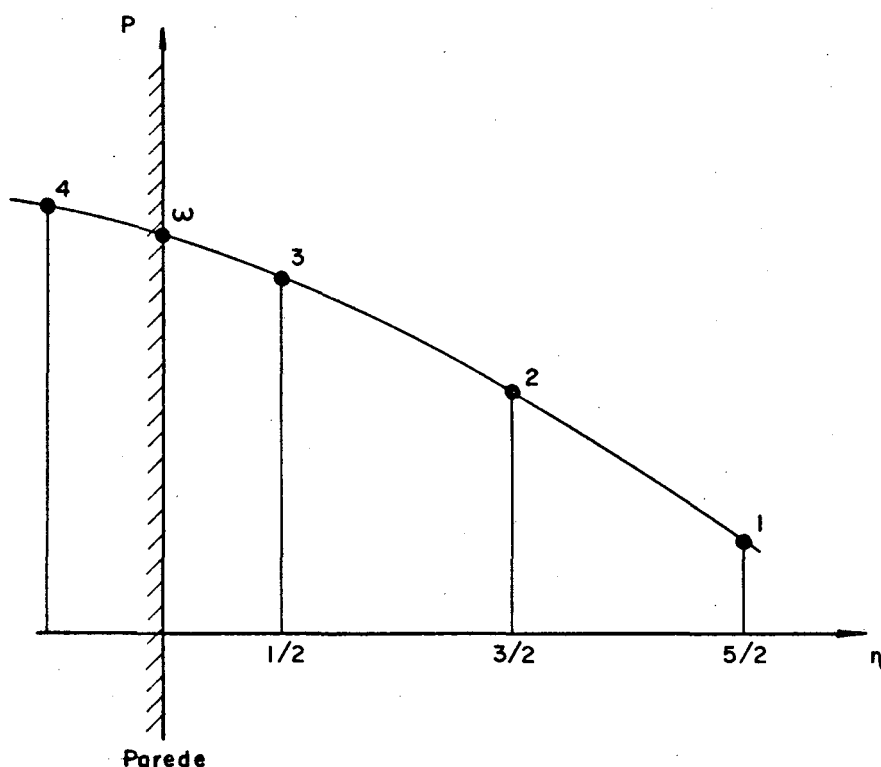


Figura 6.6 - Perfil de pressão assumido para o cálculo de gradientes de pressão nas fronteiras.

O gradiente de pressão na parede dado na Equação (6.37) também surge nos termos fonte da equação de Poisson para a pressão quando aplicada aos volumes de controle de fronteira (ver Apêndice D). Nesses casos, o gradiente é avaliado utilizando pressões calculadas na iteração (no campo de pressões) em curso, e pressões da iteração anterior nos pontos em que tais cálculos ainda não tiverem sido executados.

Esse procedimento tem a mesma precisão daqueles usando pontos fictícios em sistemas ortogonais, pois ambos usam aproximações de segunda ordem. Relações similares às Equações (6.36) e (6.38) são válidas para o cálculo de gradientes de pressão nas outras fronteiras do domínio.

6.10 - ALGUNS DETALHES NUMÉRICOS

A - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de movimento são resolvidas explicitamente, e cada varredura no campo de velocidades é precedida do avanço no campo de pressões. O processo iterativo é equivalente ao de Jacobi, diferindo apenas quanto aos cálculos entremeados de pressão. Os campos de velocidades obtidos numa dada iteração intermediária são corrigidos para satisfazer a continuidade. Tal correção, feita pelo avanço do campo de pressões, caracteriza o cálculo explícito para velocidades introduzido no método PRIME [12].

O termo forças de flutuação das equações de movimento foi subrelaxado de um fator 0,7. Essa medida foi tomada para que este termo não assumisse uma ordem de grandeza muito superior à dos demais fatores do termo fonte, especialmente nas primeiras iterações, evitando assim um processo de convergência lento ou mesmo divergência. Ocorre que, no início do processo iterativo, quando todas as variáveis dependentes ainda estão bastante longe de seus valores convergidos, a introdução de um termo fonte excessivo produz um grande desequilíbrio nas equações de movimento, podendo afetar a convergência do processo.

B - EQUAÇÃO DE PRESSÃO

A equação de pressão é resolvida implicitamente no ciclo iterativo dado na Seção 6.5. É uma equação do tipo Poisson, que como se sabe é de convergência bastante lenta, sendo por isso dominante nos problemas fluido-térmicos. O método PRIME utilizado exige a solução dessa equação apenas uma vez a cada ciclo iterativo, o que se constitui numa grande vantagem. A técnica S.O.R. foi empregada na solução da equação de pressão. Nenhum esforço foi dirigido à obtenção de um parâmetro de relaxação ótimo, porém todos os resultados foram obtidos para um valor de 1,5, cuja performance mostrou-se razoável.

No processo iterativo, a tolerância de convergência para a pressão foi fixada em $5.E-05$, segundo o seguinte critério

$$\epsilon \leq \frac{|p^{n+1} - p^n|}{|R|} \quad (6.39)$$

onde $R = P_{\max} - P_{\min}$, sendo P_{\max} e P_{\min} os valores máximo e mínimo

nimo da pressão no domínio, e ϵ é a tolerância.

Um detalhe que merece consideração é a fixação de um nível de referência para as pressões. Considere-se os problemas focalizados neste estudo, caracterizados como bidimensionais, de fluxo incompressível e com velocidades prescritas nas fronteiras. Essas velocidades devem ser especificadas tal que a massa seja conservada no domínio. Forçando a conservação da massa para todos os volumes de controle internos, exceto para um deles, então a conservação global de massa garante a satisfação da continuidade também para esse volume. Se a conservação de massa local for também forçada para tal volume, a consequência será o surgimento de uma redundância na equação de pressão, a qual, a seu turno, implicará na formação de uma matriz singular a ser resolvida quando um método direto de solução é empregado. Esse problema surge porque a equação de pressão e suas condições de contorno estabelecem uma solução dependente de uma constante genérica aditiva, ou seja, o nível de pressão não está fixo. A especificação do valor da pressão em um dado ponto do interior do domínio, com a aplicação da continuidade para todos; exceto para este ponto, estabelece o nível e elimina o problema acima referido.

Neste trabalho, no entanto, busca-se todas as soluções utilizando tão somente a técnica S.O.R., o que elimina o problema de singularidade criado nos métodos diretos, não havendo então necessidade de fixação de um nível para as pressões. Entretanto, a taxa de convergência é afetada pela fixação ou não deste nível, podendo aumentar ou diminuir [20]. Nesta dissertação não se dedicou qualquer esforço à verificação deste detalhe. Escolheu-se, no entanto, trabalhar com o nível de pressões fixo, o que rendeu resultados satisfatórios quanto à taxa de convergência. A pressão foi fixada para o volume de controle para a continuidade do canto superior direito do plano transformado, onde foi feita igual a zero, que passa a ser então o valor de referência para todas as pressões (relativas) do domínio.

C - EQUAÇÃO DE ENERGIA

O campo de temperaturas, a exemplo do de pressões, é calculado implicitamente. A equação de energia é resolvida uma única

vez a cada ciclo iterativo como definido na Seção 6.5. Sua solução é obtida aplicando-se a técnica S.O.R. . Uma subrelaxação torna-se necessária para coibir os gradientes térmicos excessivamente altos que surgem nas primeiras iterações. Estes têm origem na pronunciada diferença entre os valores de temperatura de fronteira e do interior do domínio, especialmente nas fronteiras onde a temperatura é especificada. Nenhum esforço foi concentrado na procura de subrelaxações ótimas. Entretanto, o valor 0,7 adotado mostrou-se satisfatório. O critério de convergência utilizado para a obtenção da solução da equação de energia é aquele mesmo usado para a equação de pressão. A tolerância também é mantida.

D - DETALHES GERAIS

No Capítulo 7 apresenta-se, entre outras, a solução de um problema com domínio simétrico. Quando se estiver resolvendo tais tipos de problemas, juntamente com a especificação das condições de contorno adequadas, deve-se assumir o coeficiente $\beta=0$ sobre as linhas de simetria. Essa medida, que visa a manutenção das propriedades conservativas no domínio físico (ver Seção 7.4), é condição necessária para que se possa trabalhar em domínio parcial, estabelecendo as linhas de simetria como novas fronteiras. Assim, pode-se resolver um problema apenas em parte de seu domínio, gerando grades e obtendo a solução das equações nesse domínio parcial.

O valor do avanço iterativo (no tempo) E, após alguns testes, foi fixado em 2,5, mostrando bom desempenho. Não se trata, entretanto, de um valor otimizado. Sua consideração permitiu um avanço mais rápido do ciclo iterativo.

O teste de convergência para a obtenção dos resultados finais é feito usando as velocidades cartesianas calculadas no domínio. O critério usado é o mesmo daquele para pressões. A tolerância foi fixada em $5.E-05$. A escolha das velocidades para esse teste final foi feita porque estas conferem um caráter mais restritivo ao critério de convergência, em relação à pressão e à temperatura.

6.11 - CONCLUSÕES E SUMÁRIO

O propósito deste capítulo foi a exposição do procedimento de solução adotado neste trabalho e a descrição de alguns detalhes numéricos associados a essa solução. Iniciou-se pela apresentação das equações de movimento em formulação U-V, forma em que são resolvidas no domínio transformado. Observou-se que o arranjo de grade adotado propicia a que certas componentes do vetor velocidade não estejam sujeitas à restrição da continuidade. O problema foi contornado pela determinação destas componentes por interpolação das componentes sujeitas à equação de conservação da massa. Adotou-se uma formulação U-V onde tanto as velocidades cartesianas quanto as contravariantes são avançadas no processo iterativo. Foi apresentado o método PRIME para manipulação do acoplamento pressão-velocidade, justificando-se a escolha pela sua eficiência no tratamento de problemas hidrodinâmicos [1] similares aos fluido-têrmicos aqui considerados, e por exigir a solução de apenas uma equação de Poisson a cada ciclo iterativo. Foi também obtida a equação de Poisson para a pressão e seus coeficientes para todo o domínio, sendo os coeficientes de fronteiras apresentados no Apêndice D. Ficou evidente que a equação de Poisson à 9 pontos reverte-se para uma à 5 pontos quando qualquer sistema de coordenadas ortogonal é utilizado. Através da análise dos coeficientes, verificou-se que a relação de dependência entre cada ponto de pressão no domínio é a mesma dos casos de sistemas ortogonais. Isso permitiu o uso da técnica de solução "ponto por ponto". Foi feita a abordagem do problema da aplicação das condições de contorno para cada variável dependente. Para velocidade utilizou-se a técnica de pontos fictícios. Para temperatura, optou-se pela execução de balanços de energia nas fronteiras. Suas equações de fronteira foram apresentadas no Apêndice E. Viu-se ainda, que as condições de contorno para a pressão são automaticamente introduzidas em seus coeficientes de fronteira pela combinação das equações de movimento com as velocidades prescritas nos contornos através da equação da continuidade, procedimento este equivalente ao usado para a temperatura. Concluiu-se, após alguma discussão, que o uso de pontos fictícios para pressão e temperatura não é uma solução clara ao se trabalhar com sistemas de coordenadas não-ortogonais, sendo as-

sim preterida. Os gradientes de pressão e temperatura para volumes de controle de continuidade situados nas fronteiras foram a validados através de aproximações parabólicas, justificando-se es sa escolha pelo fato de as aproximações internas ao domínio serem também de segunda ordem. Finalmente, colocou-se algumas considerações relacionadas ao procedimento numérico de solução das equações governantes.

CAPÍTULO 7

RESULTADOS OBTIDOS

7.1 - INTRODUÇÃO

Nesse capítulo testa-se o modelo numérico e obtém-se resultados para algumas cavidades. De início, faz-se uma verificação apenas hidrodinâmica, resolvendo o problema isotérmico de fluxo em uma cavidade quadrada com a parede inferior em movimento. Os resultados obtidos são comparados aos de Maliska [1]. Em seguida, introduzindo gradientes térmicos no domínio através das condições de contorno, resolve-se o problema da convecção natural laminar para duas cavidades distintas. A primeira é uma cavidade quadrada, e os resultados obtidos são comparados aos de Davis [17]. A segunda cavidade é a seção transversal de uma região anular formada por um tubo quadrado envolvido de maneira concêntrica por um cilindro circular, sendo os resultados obtidos comparados aos de Chang, Won & Cho [14]. As condições de contorno para esta cavidade são de fronteiras isotérmicas à temperaturas diferentes. Para a cavidade quadrada considera-se as fronteiras superior e inferior termicamente isoladas, enquanto as laterais são assumidas isotérmicas à temperaturas diferentes.

Por fim, apresenta-se resultados para a convecção natural laminar em uma cavidade completamente irregular, considerando condições de contorno semelhantes àsquelas para a cavidade quadrada.

O problema puramente hidrodinâmico é resolvido para números de Reynolds de 100 e 400, enquanto que as soluções para convecção natural são obtidas para números de Rayleigh entre 10^3 e 10^6 , e número de Prandtl de 0,71.

Para a cavidade quadrada obtém-se os mesmos resultados usando tanto malha ortogonal quanto não-ortogonal. Com isso busca-se avaliar o desempenho do modelo, que está construído para coordenadas generalizadas.

7.2 - TESTE HIDRODINÂMICO

Antes da introdução no modelo da equação de conservação de energia e dos efeitos de flutuação para caracterizar a convecção natural, é conveniente confirmar a validade do esquema para o caso puramente hidrodinâmico. Para tanto, utiliza-se os resultados de Maliska [1]. Considerando que o processo hidrodinâmico apresentado nesta dissertação é totalmente baseado naquele desenvolvido em [1], espera-se que na confrontação os resultados coincidam. O problema usado para testes é o de fluxo isotérmico em uma cavidade quadrada com a parede inferior em movimento. A Figura 7.1 mostra os parâmetros geométricos e as condições de contorno para esse caso. A solução é encontrada usando a malha não-ortogonal 5x5 mostrada na Figura 7.2. Tal malha grosseira pode ser aqui considerada porque em [1] o problema já foi resolvido para malhas bastante mais refinadas. Assim, se a malha 5x5 oferece bons resultados na comparação com [1], torna-se desnecessário o teste para malhas mais finas. Diga-se ainda que dispõe-se da solução de [1] exatamente para a malha aqui usada. Os resultados são obtidos para números de Reynolds de 100 e 400. Essa escolha é feita para que o teste seja executado tanto para uma situação onde os processos difusivos são predominantes ($Re = 100$), quanto para uma situação onde a convecção predomina ($Re = 400$). São duas situações distintas a serem verificadas; pois no primeiro caso as aproximações do esquema numérico reduzem-se às diferenças centrais, enquanto no segundo recaem no "Esquema de Diferenças Ponderadas à Montante" (WUDS). Quando os processos convectivos são predominantes, há a possibilidade de que a solução seja distorcida pela ocorrência de difusão numérica [20], [8]. Essa questão em especial não é aqui tratada, assinalando-se entretanto, que os presentes resultados são afetados da mesma forma que os em [1].

Os resultados de velocidades obtidos são comparados aos de [1] nas Tabelas 7.1 e 7.2, para Reynolds 100 e 400 respectivamente. Nessas tabelas u^* e v^* são as velocidades cartesianas adimensionalizadas conforme as expressões: $u^* = u/u_W$ e $v^* = v/u_W$, onde u_W é a velocidade no contorno inferior. As velocidades v^* são apresentadas nas seções AA e BB de linhas η constantes definidas

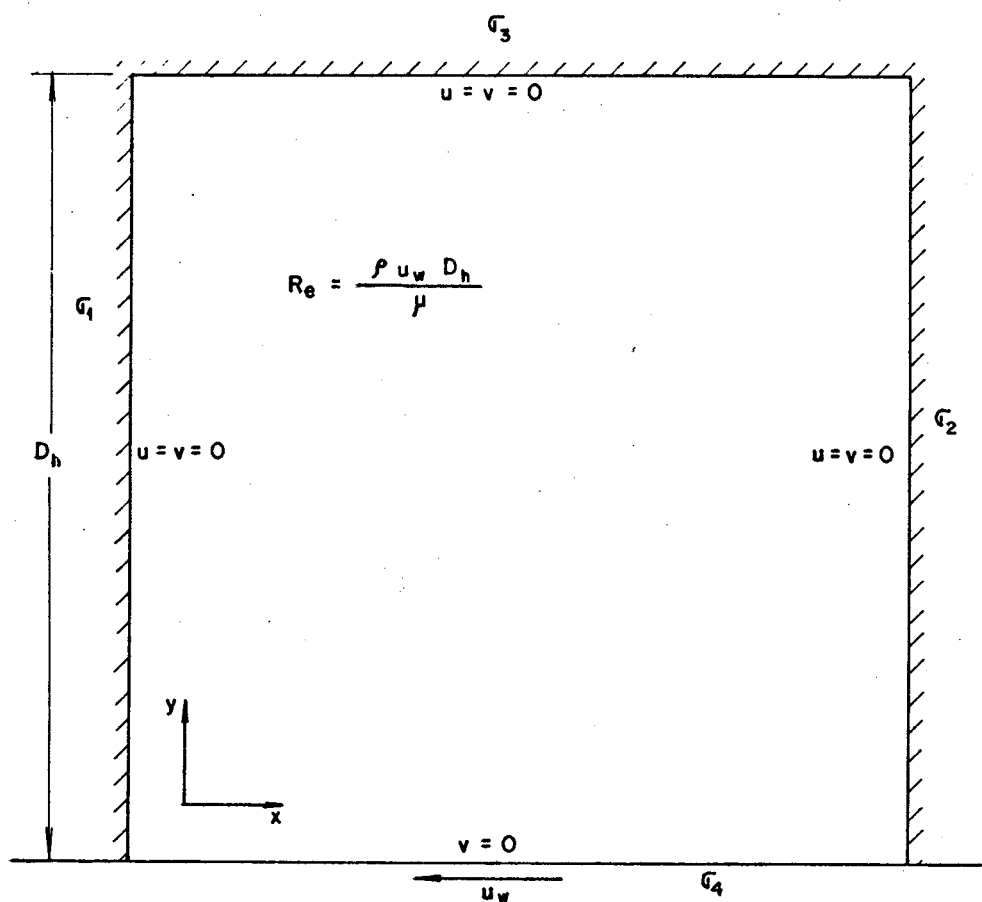


Figura 7.1 - Características geométricas e condições de contorno para o problema de fluxo hidrodinâmico em cavidade quadrada com parede inferior móvel.

na Figura 7.2. Quanto às velocidades u^* , são obtidas nas seções CC e DD de linhas ξ constantes daquela figura.

Os cálculos numéricos foram executados considerando sobre-relaxação de 1,2 para a solução de pressão, e avanço iterativo E de 2,5. As soluções foram encontradas especificando-se uma tolerância de $1.E-05$ no critério de convergência para a pressão (ver Equação 6.39).

Observando os resultados obtidos, verifica-se que estes são exatamente os mesmos conseguidos por Maliska, tanto para $Re = 100$ quanto para $Re = 400$. Os pequenos desvios registrados em alguns pontos devem-se a erros de máquina do computador, pois se está usando o mesmo modelo de [1], além de se estar fazendo as mesmas considerações numéricas.

O objetivo único desta seção foi o de testar a exatidão do código computacional, não havendo a preocupação da obtenção de

Tabela 7.1 - Perfis de velocidades nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 7.2 para $R_e = 100$.

Ponto Seção		1	2	3	4	5	
v^*	AA	0,2938	0,1227	-0,0609	-0,1338	-0,1055	
		0,2938	0,1228	-0,0609	-0,1338	-0,1055	1
	BB	0,2027	0,0664	-0,0514	-0,0848	-0,0401	
		0,2026	0,0664	-0,0514	-0,0848	-0,0401	1
u^*	CC	-0,3801	-0,0138	0,1226	0,1340	0,0803	
		-0,3802	-0,0139	0,1226	0,1340	0,0802	1
	DD	-0,3398	0,0227	0,1037	0,0993	0,0345	
		-0,3398	0,0227	0,1037	0,0993	0,0345	1

Tabela 7.2 - Perfis de velocidades nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 7.2 para $R_e = 400$.

Ponto Seção		1	2	3	4	5	
v^*	AA	0,2324	0,0658	-0,0555	-0,0929	-0,0933	
		0,2324	0,0658	-0,0555	-0,0929	-0,0933	1
	BB	0,1891	0,0410	-0,0411	-0,0752	-0,0660	
		0,1892	0,0410	-0,0411	-0,0752	-0,0660	1
u^*	CC	-0,2550	-0,0403	0,0534	0,0910	0,1047	
		-0,2551	-0,0403	0,0535	0,0910	0,1047	1
	DD	-0,2154	-0,0128	0,0359	0,0702	0,0693	
		-0,2154	-0,0128	0,0359	0,0702	0,0693	1

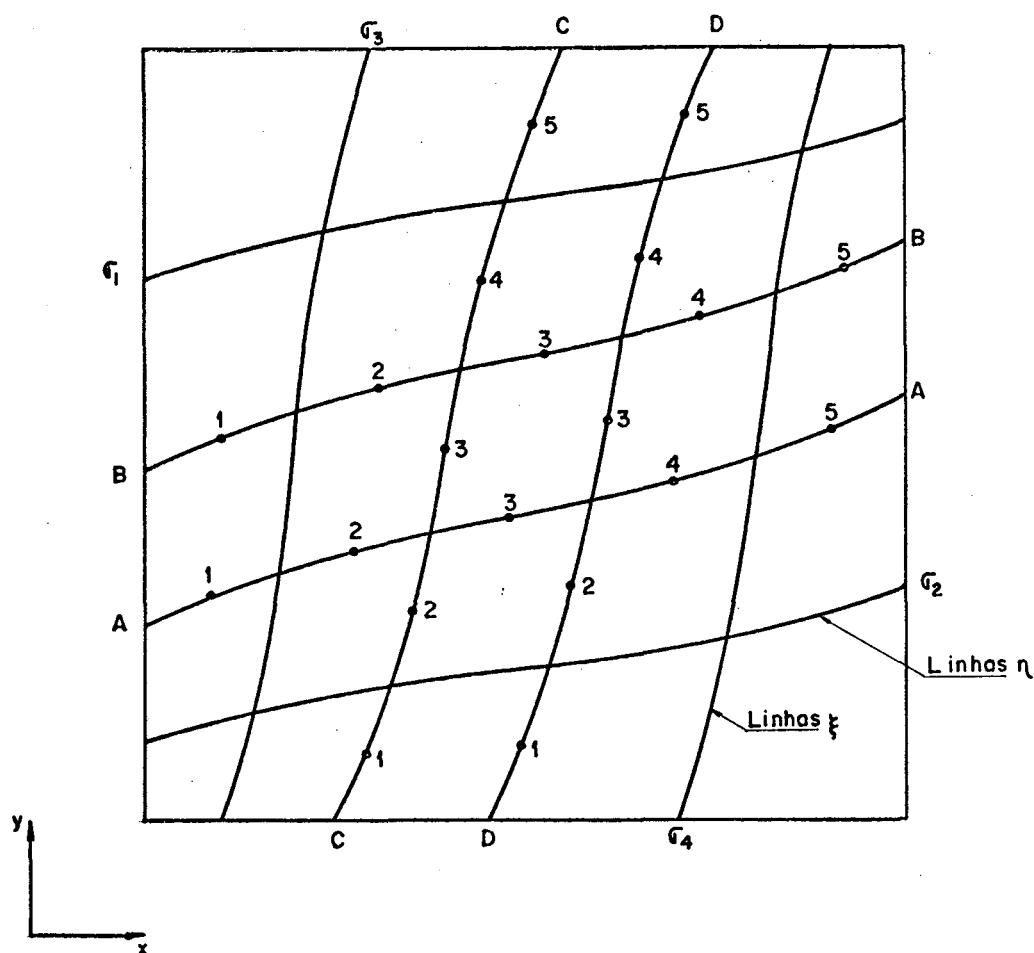


Figura 7.2 - Malha não-ortogonal 5x5.

resultados precisos. Assim, resolveu-se um único problema usando malha não refinada e sem qualquer preocupação com espaçamentos entre linhas coordenadas. Isso constituiu um teste inicial. Nas próximas seções, o modelo é testado para casos de convecção natural, e resultados precisos são obtidos para comparação com aqueles disponíveis em bibliografia.

7.3 - RESULTADOS PARA O PROBLEMA DA CONVECÇÃO NATURAL EM UMA CAVIDADE QUADRADA

Nesta seção expõe-se os resultados numéricos obtidos para o problema da convecção natural laminar em uma cavidade quadrada. Considera-se a cavidade com paredes sólidas, sendo as verticais isotérmicas à temperaturas diferentes, e as horizontais termicamente isoladas. As soluções são obtidas para números de Rayleigh

entre 10^3 e 10^6 , e para número de Prandtl de 0,71. A limitação superior para o número de Rayleigh é fixada em 10^6 por dispor-se em bibliografia de resultados apenas até este valor. Por outro lado, nenhum esforço foi aqui dirigido ao estabelecimento de um valor limite levando em consideração questões de convergência e estabilidade numérica do modelo. O número de Prandtl, a seu turno, é fixado em 0,71 por conveniência. Trata-se de um número característico para o ar, para o qual dispõe-se de vários resultados em bibliografia. Observe-se contudo, que o número de Prandtl exerce certo efeito sobre os resultados, sendo essa influência de alguma significância apenas para números de Rayleigh superiores a 5×10^4 [16].

A Figura 7.3 mostra os parâmetros geométricos e as condições de contorno para o problema. Os resultados são estabelecidos sobre as malhas 26×26 mostradas nas Figuras 7.4 e 7.5, sendo a primeira ortogonal e a segunda não-ortogonal. Note-se que em ambos os casos, há uma maior concentração de linhas coordenadas nas regiões de fronteiras. Essa medida garante uma maior precisão das aproximações numéricas justamente nos contornos, onde se desenvolvem os maiores gradientes das variáveis dependentes. A concentração das linhas coordenadas permite que estes gradientes sejam melhor captados. Optou-se pelo uso de malhas 26×26 porque estas possibilitam uma concentração adequada nas fronteiras, e ainda mantêm uma distribuição satisfatória de linhas coordenadas nas demais regiões do domínio. Para a malha não-ortogonal da Figura 7.5, a concentração é obtida pela especificação adequada das funções $Q(\xi, \eta)$ e $P(\xi, \eta)$ definidas no Capítulo 2. Também é importante nesse caso, a escolha da distribuição dos pontos sobre o contorno geométrico. Estes estão distribuídos de maneira que as linhas coordenadas geradas assumem direções que se aproximam da trajetória do fluxo de massa na cavidade. Busca-se através dessa medida, minimizar os efeitos da difusão numérica sobre os resultados obtidos, especialmente para os altos números de Rayleigh.

Os resultados aqui obtidos são comparados aos de Davis [17]. Esse autor utiliza formulação em termos de função corrente-vorticidade, aproximações em diferenças centrais, e adota a aproximação de Boussinesq na modelagem da convecção natural, obtendo

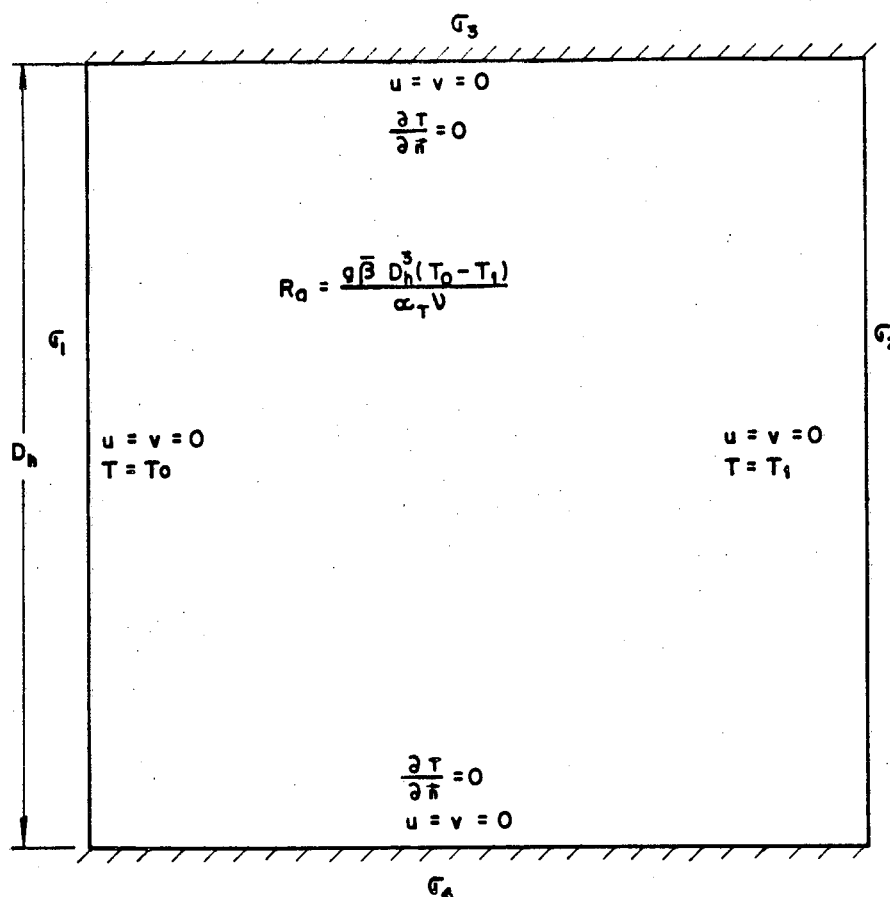


Figura 7.3 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar em cavidade quadrada.

suas soluções para $Pr = 0,71$ e $10^3 \leq Ra \leq 10^6$. Através da obtenção de resultados para algumas malhas uniformes de refinamentos diferentes, Davis estabelece por extrapolação, uma solução à qual denomina "solução de referência", e à qual atribui precisão de menos de 1% para os maiores valores de Rayleigh, e de menos de 0,1% para os menores. O objetivo de Davis é, exatamente, fornecer uma solução que possa ser usada como padrão para o teste de modelos numéricos bidimensionais. Nesse sentido, Davis & Jones [18] realizam um exercício comparativo entre vários modelos desenvolvidos por diversos autores, a partir da confrontação de suas soluções com a "solução de referência" de Davis.

Os resultados de velocidades e temperaturas são aqui apresentados em forma adimensional, para uma cavidade também adimensionalizada. As adimensionalizações são as seguintes

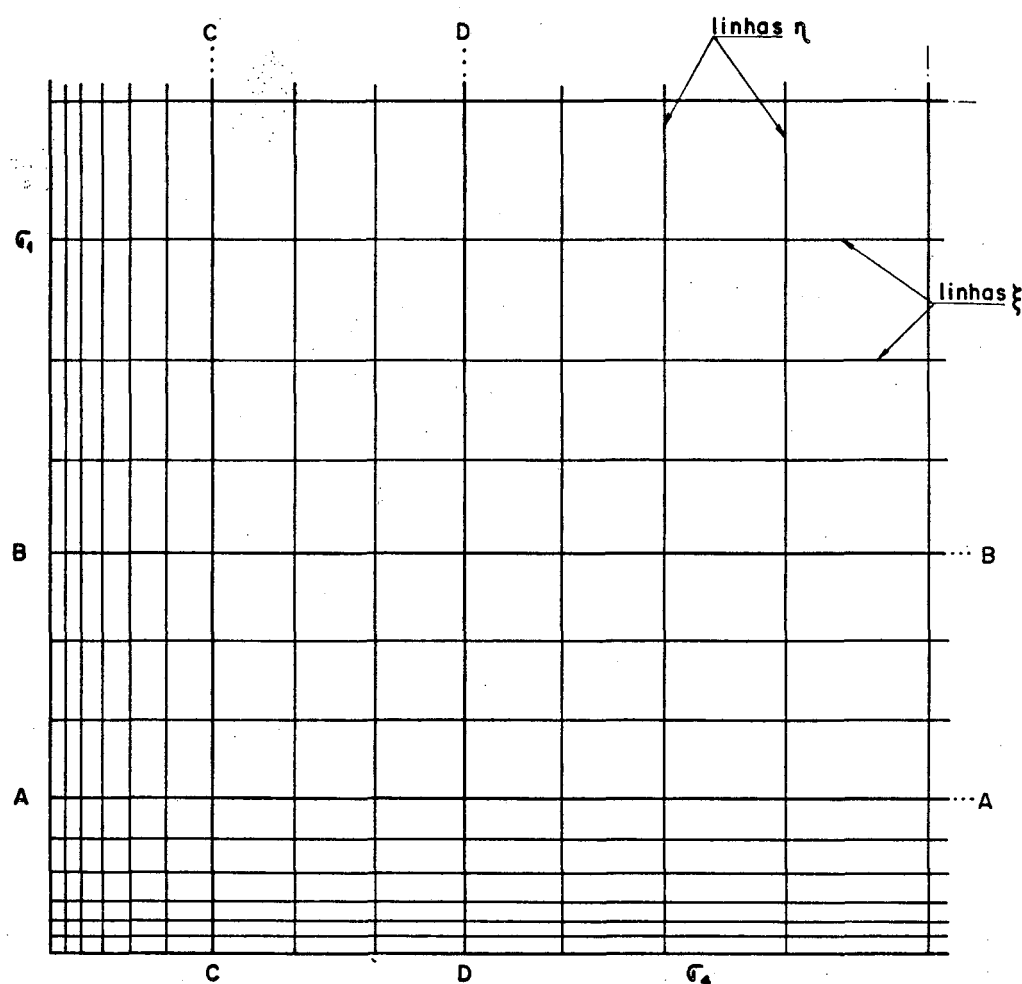


Figura 7.4 - Malha ortogonal não-uniforme 26x26. Quadrante inferior esquerdo. Demais quadrantes simétricos.

$$u^* = \frac{u D_h}{\alpha_T}$$

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_o - T_1}$$

$$x^* = \frac{x}{D_h}$$

$$y^* = \frac{y}{D_h} ,$$

(7.1)

onde u , v , T , x e y são, respectivamente, os valores dimensionais

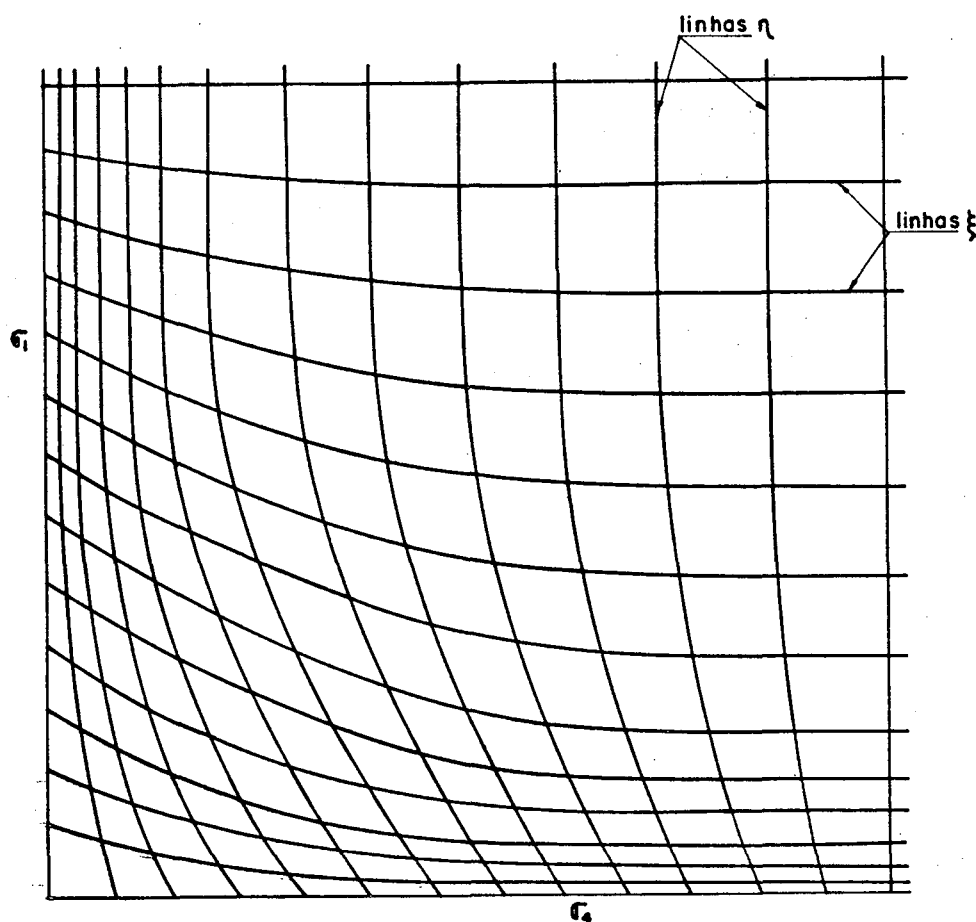


Figura 7.5 - Malha não-ortogonal 26x26. Quadrante inferior esquerdo. Demais quadrantes simétricos.

nais de velocidades cartesianas, temperatura e coordenadas cartesianas; D_h é a altura da cavidade; α_T é o coeficiente de difusividade térmica; e, T_0 e T_1 são, respectivamente, as temperaturas das fronteiras esquerda e direita da cavidade quadrada, sendo T_0 maior que T_1 .

Em termos de engenharia, é de grande importância a determinação do fluxo de calor que atravessa as fronteiras da cavidade. O fluxo de calor local na direção horizontal, para cada ponto das fronteiras verticais, é dado por

$$q(y) = -K \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \quad (7.2)$$

onde \vec{n} é o vetor normal à linha de fronteira em cada ponto consi

derado. Os contornos verticais são linhas de ξ constante, e a expressão de derivada normal a essas linhas para sistemas de coordenadas generalizadas é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = J\alpha \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \xi} - J\alpha^{\frac{-1}{2}} \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad , \quad (7.3)$$

onde α e β são os coeficientes definidos no Capítulo 2. Na Equação (7.3), a derivada $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ é obtida em aproximação parabólica, utilizando-se a expressão dada na Equação (E.18) do Apêndice E. A derivada $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ nesse caso é nula, pois as fronteiras verticais são isotérmicas.

Os números de Nusselt locais são dados por

$$N_u(y^*) = -D_h J \left(\alpha^{\frac{1}{2}} \frac{\partial T^*}{\partial \xi} - \alpha^{\frac{-1}{2}} \beta \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \quad . \quad (7.4)$$

O número de Nusselt médio ao longo das fronteiras verticais é dado por

$$N_{uo} = \int_0^1 N_u(y^*) dy^* \quad , \quad (7.5)$$

e é aqui calculado pelo processo de médias ponderadas.

Na Tabela 7.3 faz-se a comparação de alguns resultados obtidos sobre a malha ortogonal da Figura 7.4 com a "solução de referência" de Davis [17], para números de Rayleigh de 10^3 a 10^6 , e para número de Prandtl de 0,71. Os valores comparados são: a velocidade cartesiana horizontal máxima na linha média vertical da cavidade e sua coordenada de localização - (u_{\max}^*, y_{\max}^*) ; a velocidade cartesiana vertical máxima na linha média horizontal da cavidade e sua coordenada de localização - (v_{\max}^*, x_{\max}^*) ; os números de Nusselt máximo e mínimo ao longo da fronteira esquerda e suas coordenadas de localização - (Nu_{\max}, y_{\max}^*) e $(Nu_{\min}^*, y_{\min}^*)$; e o número de Nusselt médio na fronteira esquerda da cavidade - N_{uo} . Os valores máximos e mínimos das variáveis dependentes não estão necessariamente localizados sobre os pontos discretos de grade onde são calculados. Assim, para obtê-los, bem

Tabela 7.3 - Velocidades máximas nas linhas médias da cavidade quadrada e números de Nusselt máximos, mínimos e médios na fronteira esquerda. Resultados para malha ortogonal e $Pr=0,71$. Comparação com [17].

R_a	u_{\max}^* y_{\max}^*	v_{\max}^* x_{\max}^*	Nu_{\max} y_{\max}^*	Nu_{\min} y_{\min}^*	Nu_o	
10^3	3,679 0,8384	3,724 0,1477	1,466 0,1301	0,747 1	1,116	
	3,649 0,813	3,697 0,178	1,505 0,092	0,692 1	1,117	[17]
10^4	16,091 0,8476	20,090 0,1040	3,555 0,1440	0,603 1	2,238	
	16,178 0,823	19,617 0,119	3,528 0,143	0,586 1	2,238	[17]
10^5	35,65 0,8827	68,95 0,0548	7,714 0,0807	0,806 1	4,468	
	34,73 0,855	68,59 0,066	7,717 0,081	0,729 1	4,509	[17]
10^6	67,58 0,8975	224,82 0,0307	18,132 0,0364	1,214 1	8,743	
	64,63 0,850	219,36 0,0379	17,925 0,0378	0,989 1	8,817	[17]

como às suas coordenadas de localização, há a necessidade de interpolações. Os perfis são então aproximados por polinômios de terceira ordem, e os extremos são obtidos por diferenciação numérica.

Observe-se que quanto maior o número de Rayleigh, maiores são as velocidades máximas calculadas, e mais próximas estão das fronteiras laterais. Isso é fruto do crescimento do processo convectivo na cavidade, em consequência do que, há a formação de camadas limites cada vez mais finas nas paredes. O número de

Nusselt máximo também aumenta com Ra , crescendo porém em proporção inferior em relação ao fluxo hidrodinâmico. Com efeito, ao se variar Ra de 10^3 para 10^6 , v_{\max}^* passa de 3,724 à 224,82, enquanto Nu_{\max} passa de 1,466 à apenas 18,132.

Como pode ser visto na Tabela 7.3, os resultados estão em muito boa concordância com os de [17], sendo verificados maiores desvios apenas para os valores de Nu_{\min} , com a discrepância crescendo com Rayleigh. Os grandes erros aparecem em virtude da alta sensibilidade de cálculo do número de Nusselt mínimo. De fato, introduzindo um erro de 0,1% em todo o campo de temperaturas calculado no domínio, o Nu_{\min} resultante, para $Ra = 10^6$, em vez de 1,214 passa a ser 0,9429, afetado portanto de um erro de aproximadamente 22%. Vale lembrar que Davis atribuiu à sua solução uma precisão de até 1% para os maiores valores de Rayleigh. Desta forma, os erros relativos à [17] verificados em Nu_{\min} em nada afetam a qualidade das soluções aqui obtidas.

O exercício comparativo de Davis & Jones [18] mostra que uma grande quantidade de trabalhos apresentam resultados bastante mais defasados em relação à "referência" de Davis que aqueles aqui obtidos. Considerando os 37 trabalhos confrontados por aqueles autores, os quais utilizam os mais distintos modelos e metodologias de solução, os presentes resultados podem ser qualificados como muito bons, em relação àquela referência.

Os resultados obtidos para a malha não-ortogonal da Figura 7.5 estão plotados nas Figuras 7.6 a 7.15, em comparação com os resultados equivalentes obtidos para a malha ortogonal da Figura 7.4, para números de Rayleigh entre 10^3 e 10^6 e para número de Prandtl de 0,71. Como pode ser observado em todos esses gráficos, os resultados estão em boa concordância. Fica então comprovada a correção da modelagem em termos de coordenadas generalizadas para os problemas aqui tratados.

Nos diagramas das Figuras 7.6 a 7.13 estão representados perfis de velocidade no plano médio horizontal e linhas AA e BB para v^* ; e no plano médio vertical e linhas CC e DD para u^* . As linhas AA, BB, CC e DD estão definidas na Figura 7.4. Nas Figuras 7.6 a 7.13 estão ainda plotados os perfis de u^* e v^* nas linhas médias horizontal e vertical para a malha não-ortogonal da

Figura 7.5. Note-se que para os pequenos números de Rayleigh (10^3 e 10^4), há apenas um único vórtice de recirculação que abrange toda a cavidade. Nesses casos a difusão viscosa impede o desenvolvimento de vórtices secundários. Para Rayleigh maiores (10^5 e 10^6), há a ocorrência de vórtices secundários de recirculação. Na Figura 7.14 apresenta-se os perfis de temperatura na linha média horizontal da cavidade. Evidentemente, quanto mais intenso o processo convectivo (Rayleigh crescentes), mais a solução se distancia daquela para o caso de condução pura (perfil linear). A concavidade apresentada pelas curvas de temperatura é tanto mais pronunciada quanto maior for o número de Rayleigh, e sua orientação depende do sentido do fluxo na cavidade.

Na Figura 7.15 estão representados os perfis de Nusselt ao longo da fronteira esquerda. Com o aumento de Rayleigh, o processo convectivo é intensificado, aumentando a taxa de troca de calor. Assim, como pode ser visto naquela figura, os valores de Nusselt locais aumentam com o crescimento de Rayleigh. Note-se ainda que os valores máximos de Nusselt ocorrem na base da cavidade, enquanto os mínimos ocorrem no topo (ver também a Tabela 7.3). Como pode ser visto há uma defasagem pronunciada entre os perfis obtidos para as duas malhas, ortogonal e não-ortogonal, nos extremos do contorno. Ocorre que a malha não-ortogonal utilizada é bastante grosseira nos cantos da cavidade, implicando na obtenção de resultados pouco precisos nestas regiões.

É óbvio que as taxas de troca de calor são maiores nas regiões da cavidade onde há maiores gradientes térmicos (maiores valores de Nusselt). Estas regiões são facilmente localizadas levantando-se diagramas de linhas térmicas equipotenciais, sendo que um maior adensamento destas linhas indica maiores gradientes térmicos, e por conseguinte, maiores taxas de troca de calor. Esta forma alternativa de apresentação de resultados, apesar de facilitar sobremaneira a interpretação física do problema, não é aqui utilizada por não haver disponibilidade de plotadores de gráficos, e porque o processo manual de plotagem é extremamente demorado e trabalhoso. Pelos mesmos motivos não apresenta-se também diagramas de linhas de corrente. Estas permitiriam a visualização dos vórtices de recirculação e das regiões de estagnação na cavidade.

As tolerâncias especificadas para o critério de convergência na obtenção de todos os resultados foram, para pressão, temperatura e velocidade, de $5.E-05$. Assumiu-se perfil inicial de temperatura linear, e os campos iniciais de pressão e velocidades foram feitos nulos.

As soluções foram encontradas usando um computador IBM4341, considerando precisão aritmética simples em todos os cálculos. Para $Ra = 10^3$ os resultados finais para a malha ortogonal foram encontrados após 199 iterações (ver Seção 6.5) consumindo 25,11 minutos de CPU, e para a malha não-ortogonal foram necessárias 222 iterações com 24,22 minutos de CPU. Para $Ra = 10^4$, obteve-se 125 iterações em 20,59 minutos de CPU para a malha ortogonal, e 140 iterações com 21,30 minutos de CPU para a malha não-ortogonal. Para $Ra = 10^5$, obteve-se 90 iterações com 14,12 minutos de CPU para a malha ortogonal, e 88 iterações em 13,48 minutos de CPU para a malha não-ortogonal. Por fim, para $Ra = 10^6$, foram necessárias 70 iterações em 10,58 minutos de CPU para a malha ortogonal, enquanto a malha não-ortogonal exigiu 72 iterações em 11,28 minutos de CPU. Todos esses números foram encontrados trabalhando-se com modelo numérico não otimizado em relação às suas variáveis (avanços no tempo, sobrerelaxações, etc - ver Capítulo 6), embora bons valores destas tenham sido utilizados.

É sabido que a convecção, que é um fenômeno de transporte bem mais poderoso que a difusão, acelera consideravelmente o desenvolvimento dos processos físicos na direção do estabelecimento de regimes permanentes. Observe-se, a partir dos dados acima, que o crescimento da convecção no domínio de cálculos (Rayleigh crescentes) acelera o processo iterativo, e o tempo de computação necessário para a obtenção da solução final em regime permanente declina sensivelmente. Isso é consequência óbvia do fato de o modelo utilizado obedecer a física do problema em cada etapa de seu desenvolvimento. Note-se ainda que o tempo consumido no processo numérico foi da mesma ordem para ambas as malhas, ortogonal e não-ortogonal.

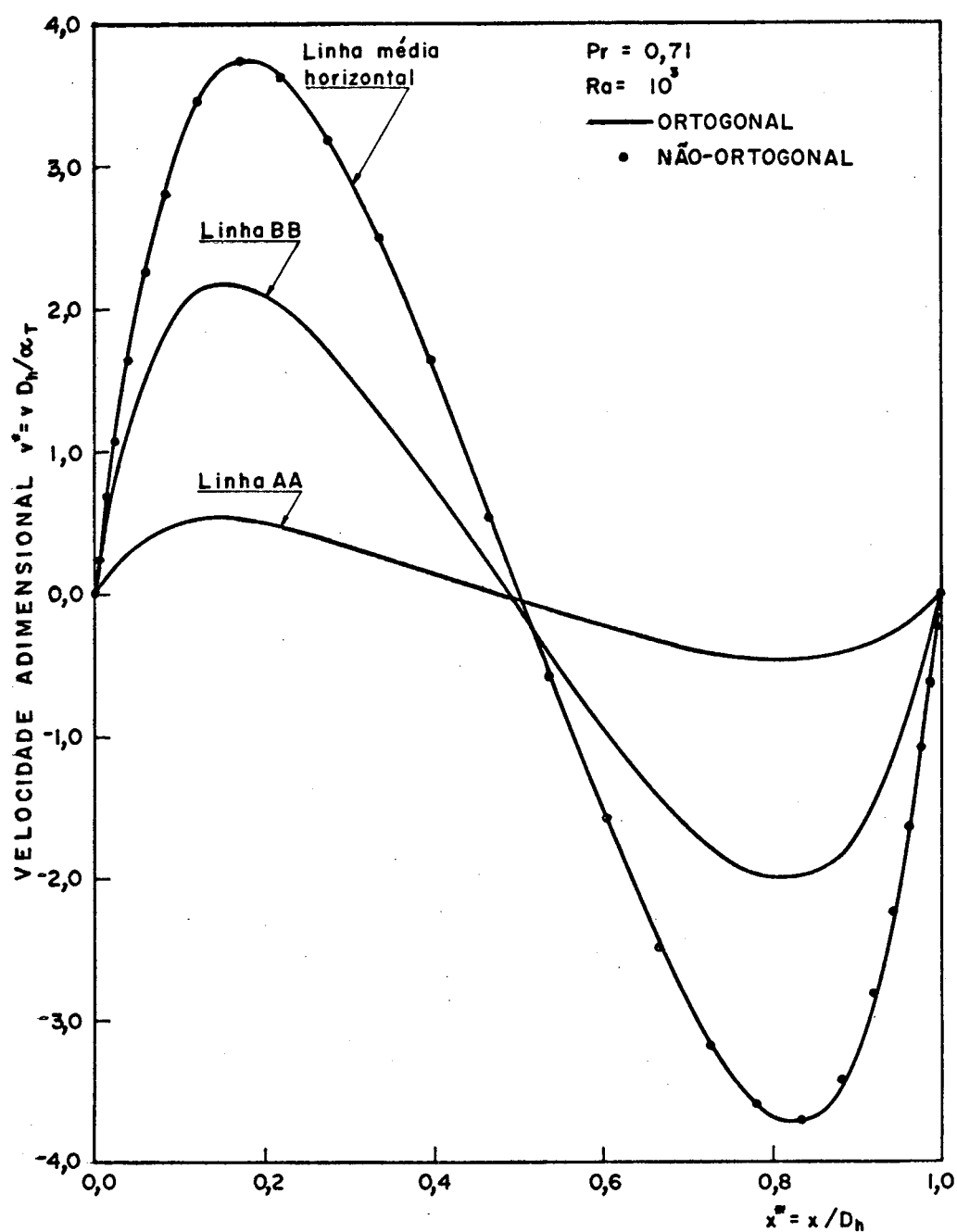


Figura 7.6 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas média horizontal, AA e BB para a cavidade quadrada. $Ra = 10^3$; $Pr = 0,71$.

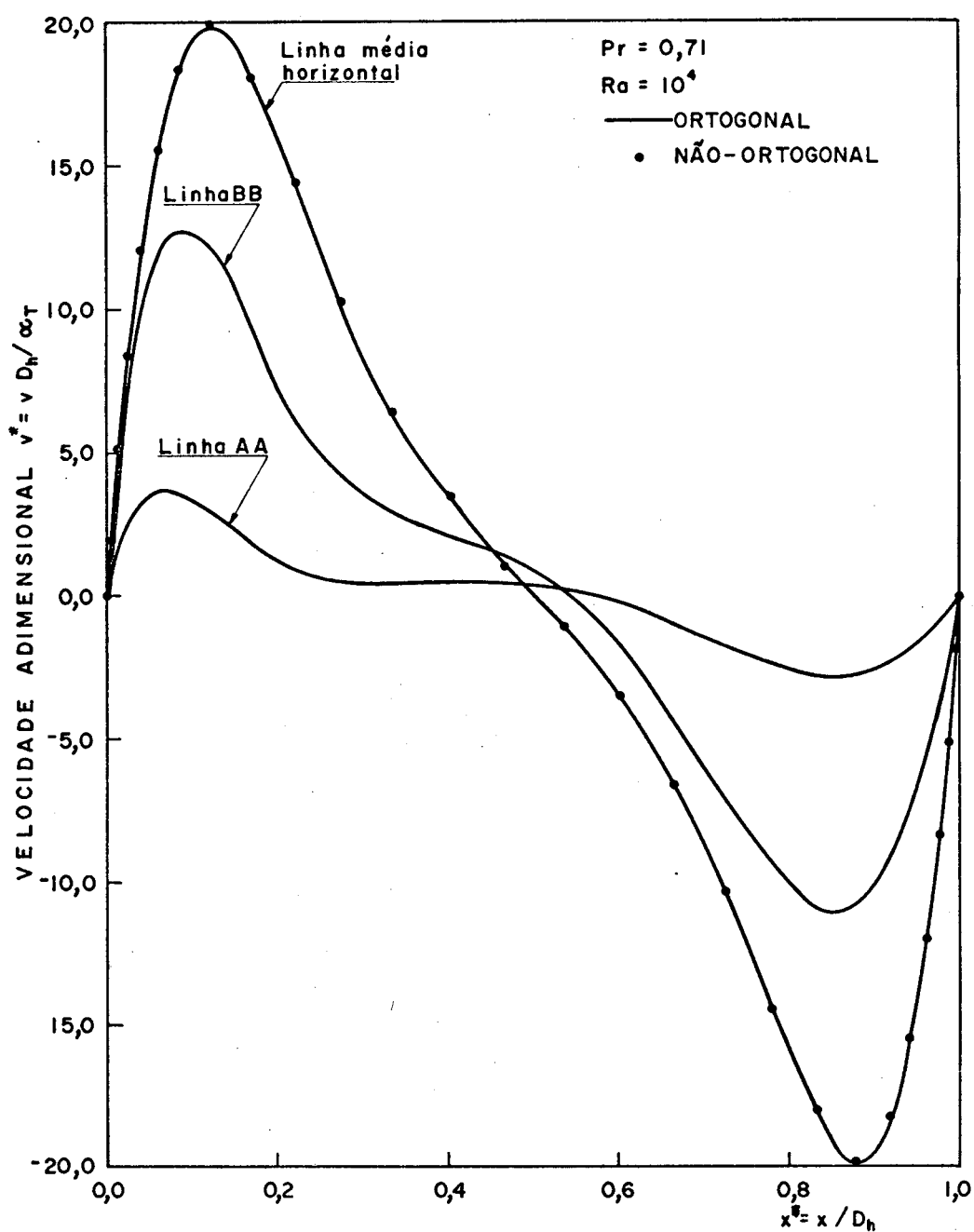


Figura 7.7 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas média horizontal, AA e BB para a cavidade quadrada. $Ra = 10^4$; $Pr = 0,71$.

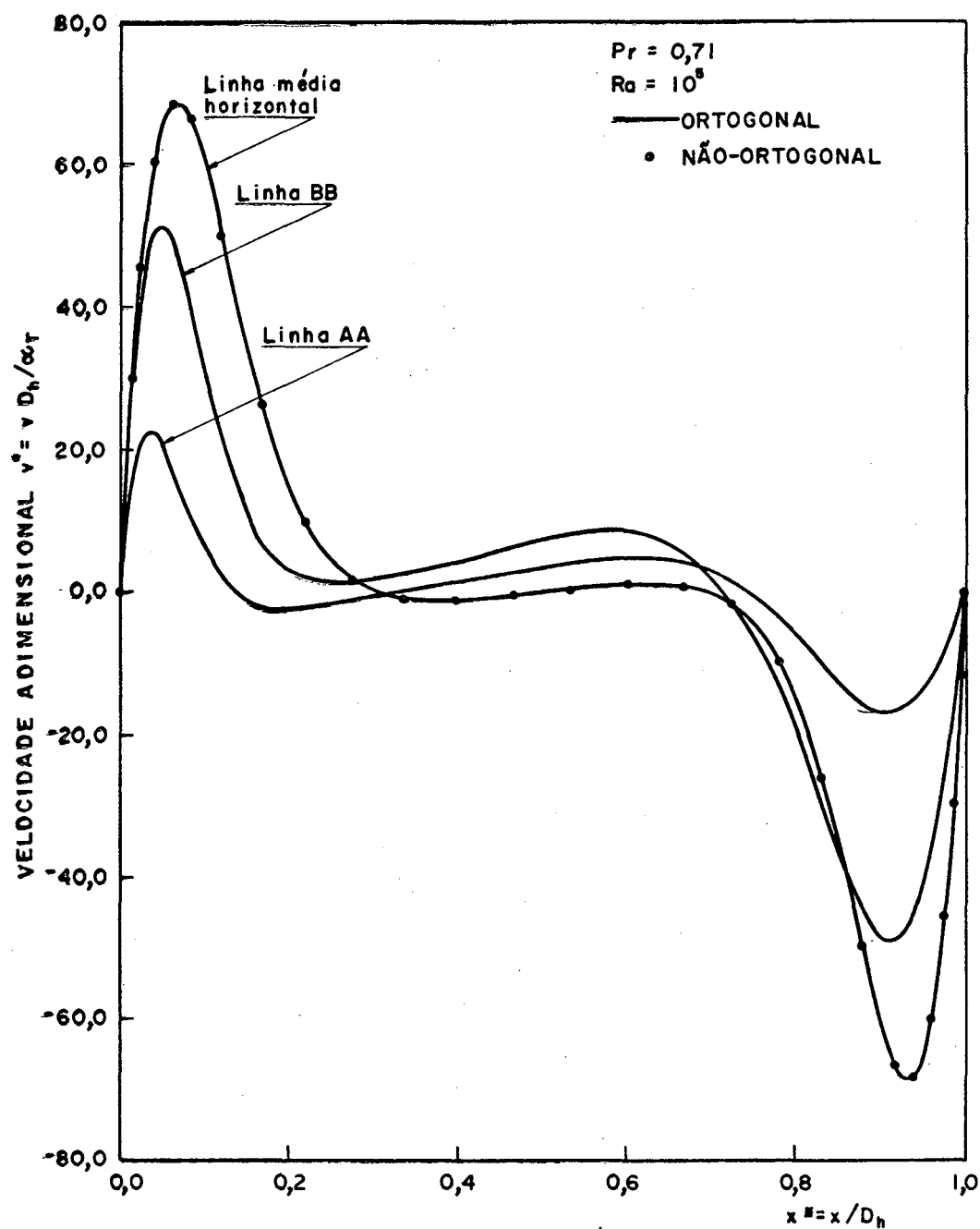


Figura 7.8 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas média horizontal, AA e BB para a cavidade quadrada. $Ra = 10^5$; $Pr = 0,71$.

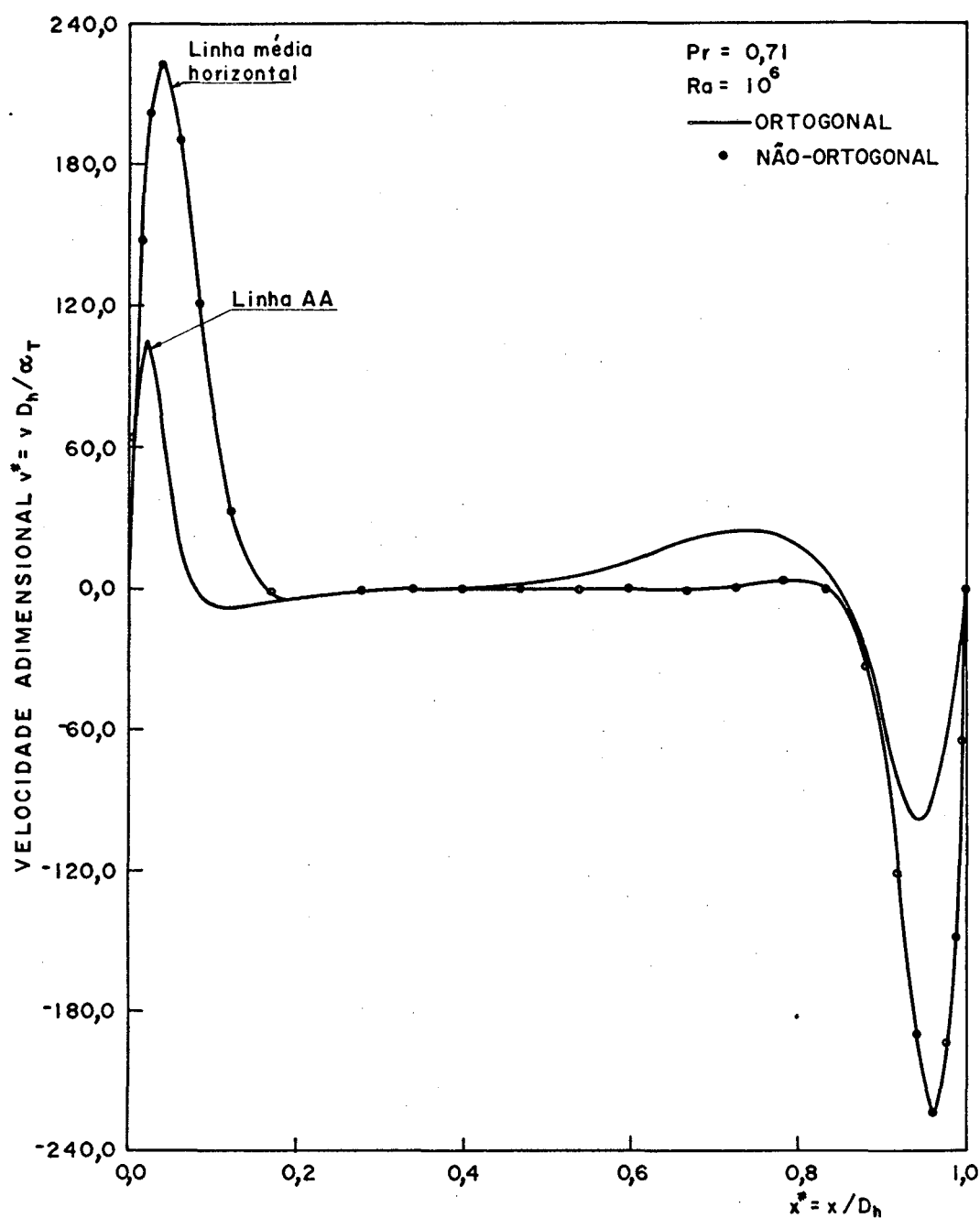


Figura 7.9 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas média horizontal e AA para a cavidade quadrada. $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$.

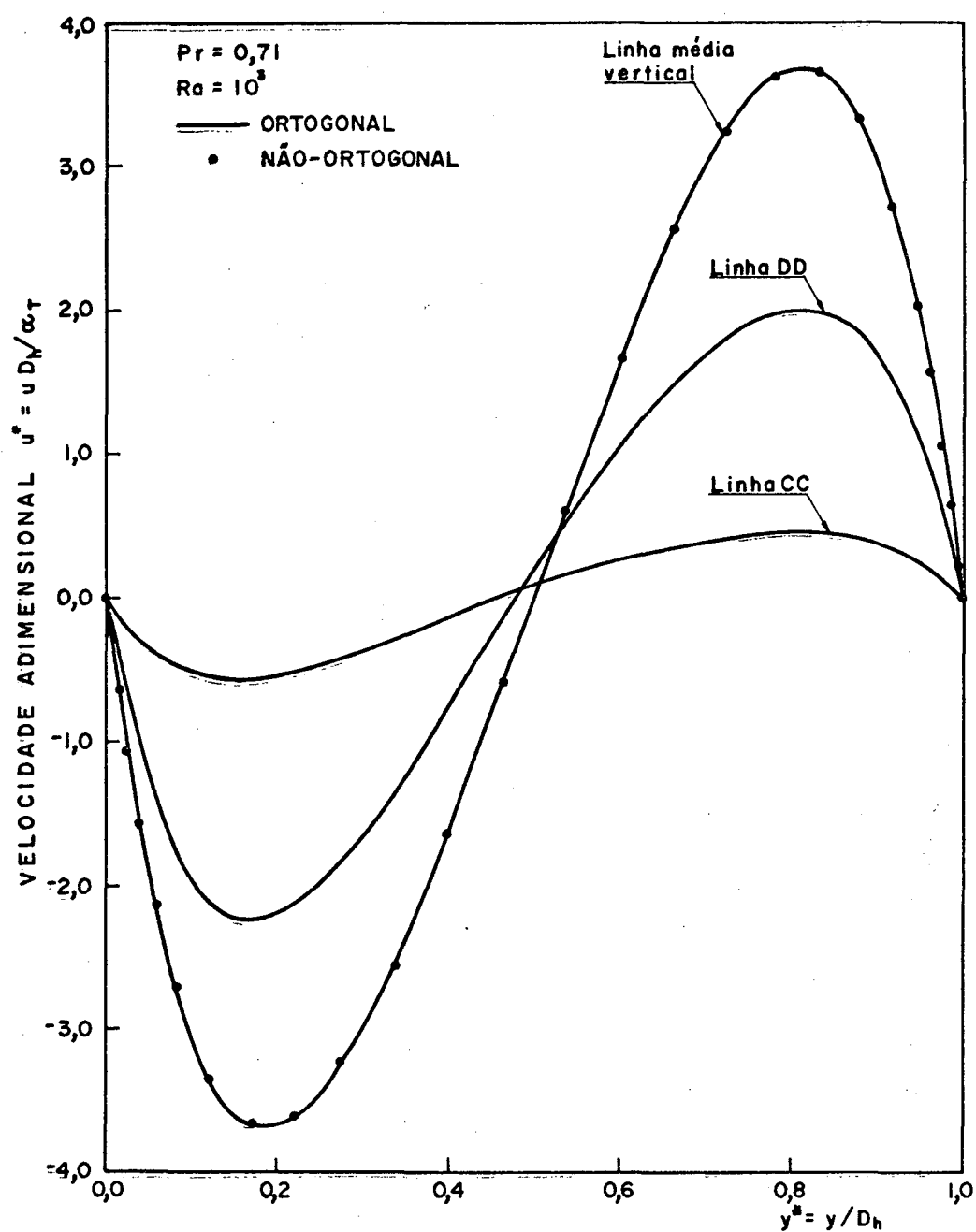


Figura 7.10 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas média vertical, CC e DD para a cavidade quadrada. $Ra = 10^3$; $Pr = 0,71$.

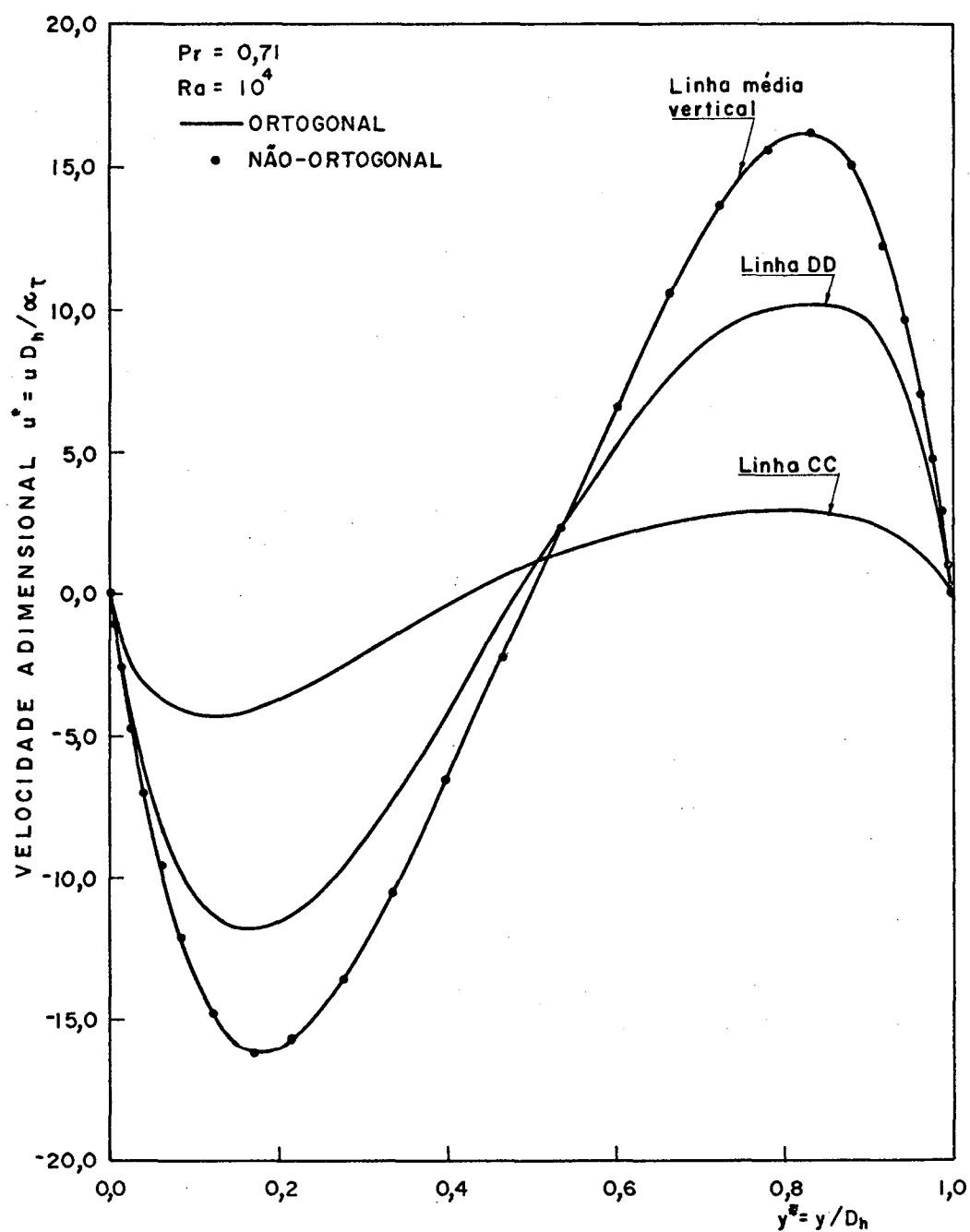


Figura 7.11 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas média vertical, CC e DD para a cavidade quadrada. $Ra = 10^4$; $Pr = 0,71$.

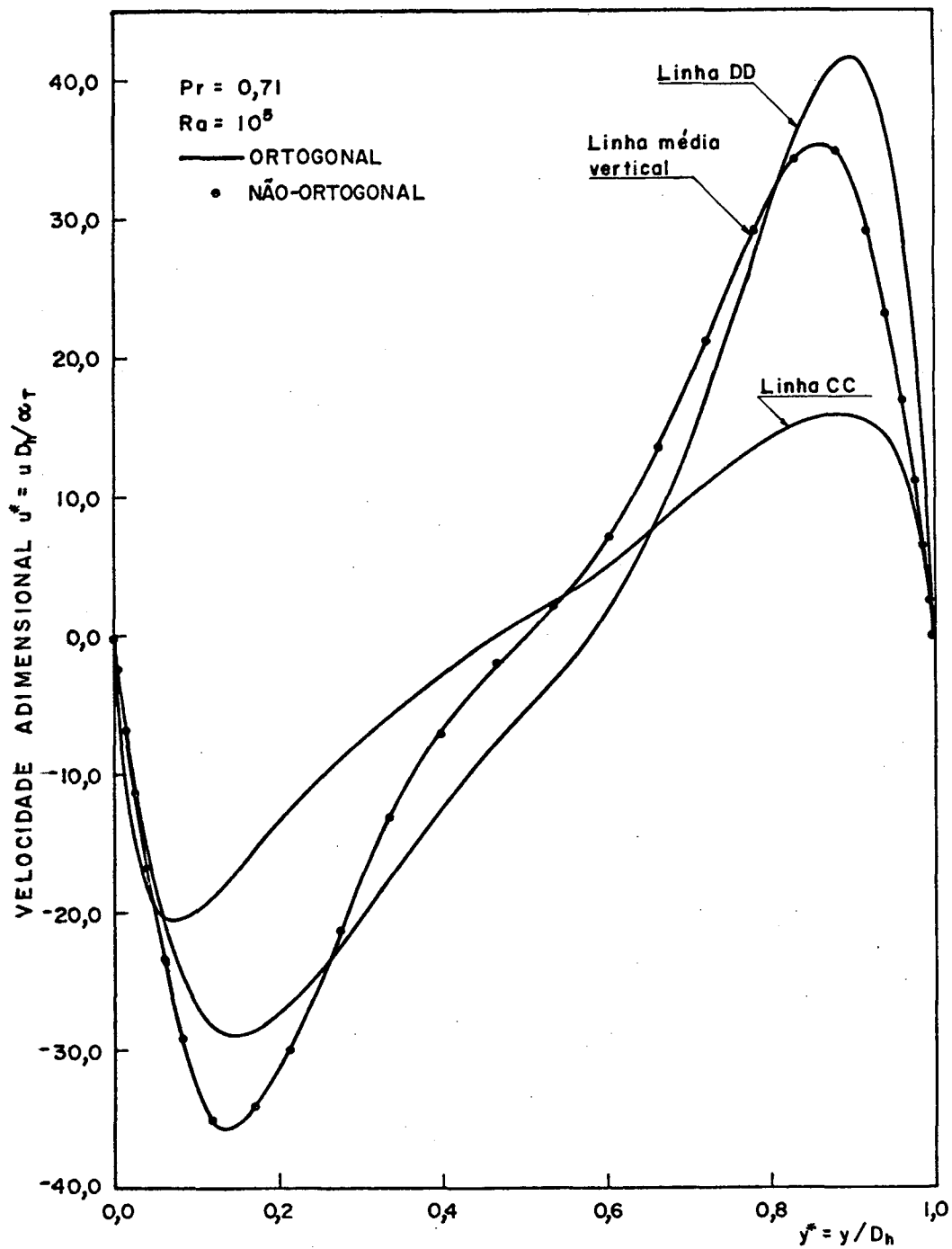


Figura 7.12 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas média vertical, CC e DD para a cavidade quadrada. $Ra = 10^5$; $Pr = 0,71$.

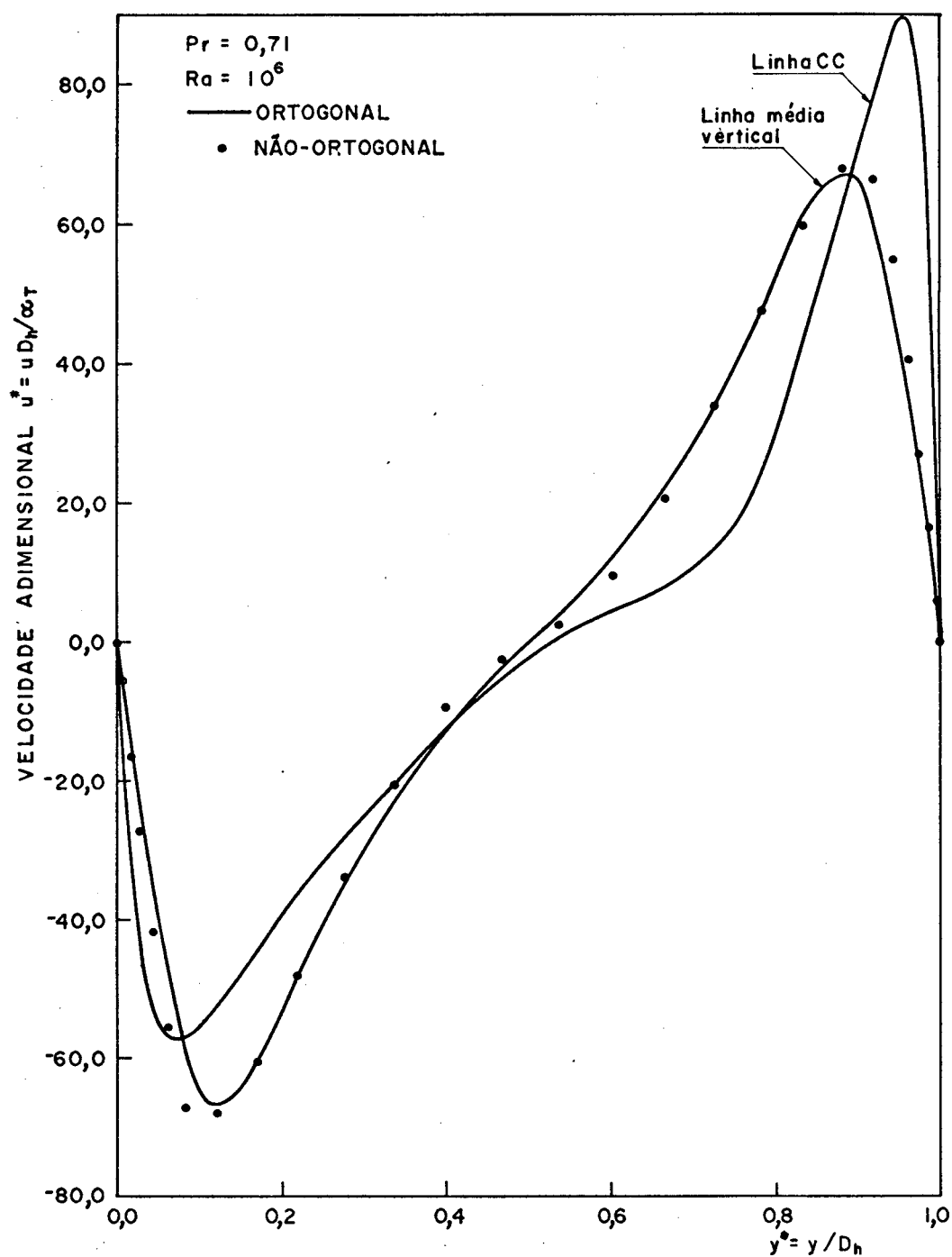


Figura 7.13 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas média vertical e CC para a cavidade quadrada.
 $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$.

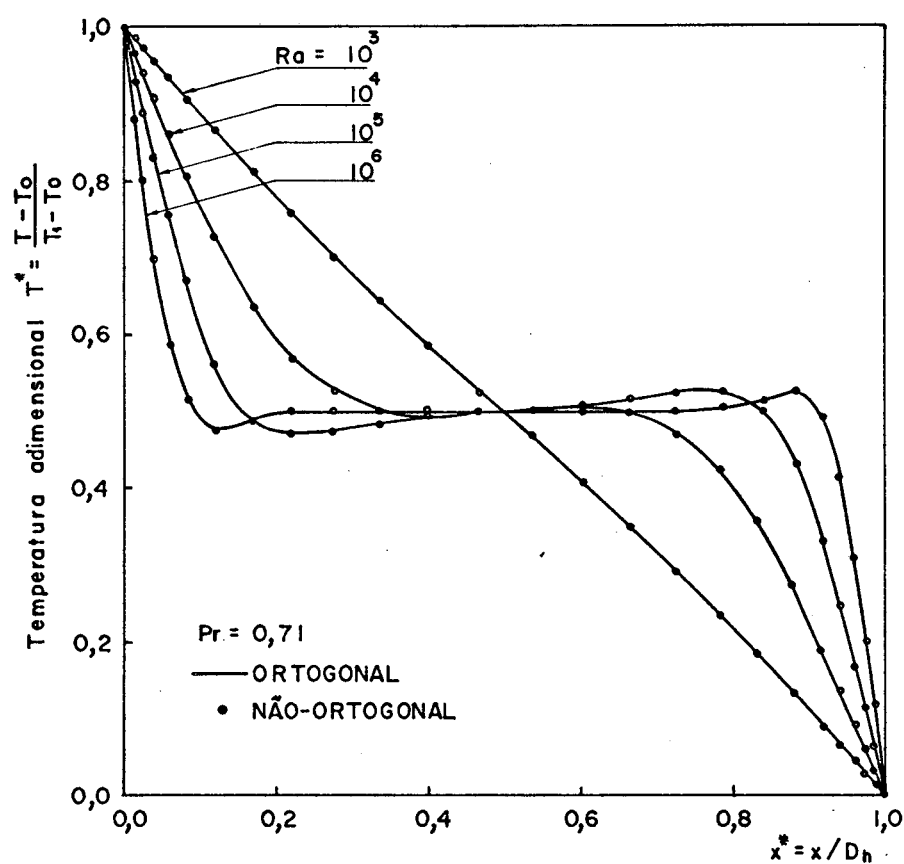


Figura 7.14 - Perfis de temperatura na linha média horizontal para a cavidade quadrada usando as malhas ortogonal e não-ortogonal. $Ra = 10^3$, 10^4 , 10^5 e 10^6 ; $Pr = 0,71$.

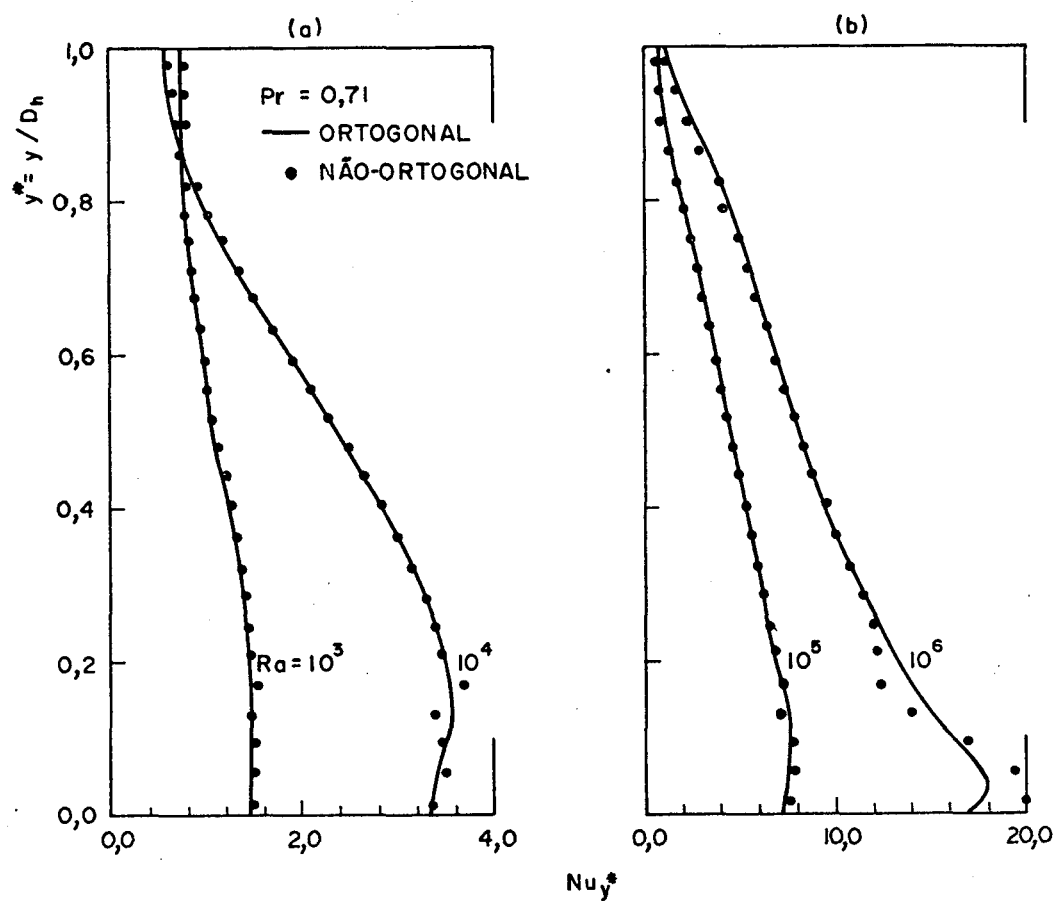


Figura 7.15 - Perfis de número de Nusselt ao longo da fronteira esquerda da cavidade quadrada para as malhas ortogonal e não-ortogonal. $Pr = 0,71$.
 (a) - $Ra = 10^3$ e 10^4 ; (b) - $Ra = 10^5$ e 10^6 .

7.4 - RESULTADOS PARA UMA CAVIDADE ANULAR

Esta seção é dedicada à exposição da solução do problema da convecção natural obtida para a seção transversal de uma região anular formada por um tubo quadrado envolvido de maneira concêntrica por um tubo cilíndrico. Dos resultados apresentados, alguns são comparados aos de Chang et al. [14]. A Figura 7.16 mostra os parâmetros geométricos e as condições de contorno para o problema. Tais condições são de paredes sólidas e isotérmicas para ambos os tubos.

Considerando a simetria em relação à linha central vertical apresentada pelo problema, este é aqui resolvido apenas para a metade do domínio. Para que isso possa ser feito deve-se especificar o coeficiente $\beta=0$ nas linhas de simetria. Essa consideração tem por fim eliminar inconsistências que surgem quando da aplicação dos termos fonte para as equações de conservação. Nesses termos (ver Equação 5.2) surge a expressão

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) .$$

Para a equação de movimento em v , por exemplo, tal expressão é aproximada em diferenças finitas para o volume de controle 1 da Figura 7.18, resulta

$$C_5 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_{\eta+} - C_5 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_{\eta-} .$$

Esse termo representa tensões cizalhantes atuando nas faces de η constante do volume de controle. Ao se trabalhar sobre o domínio inteiro, o termo $C_5 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_{\eta-}$ para o volume de controle 1 cancela-se com o termo $C_5 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_{\eta+}$ do volume de controle 2 (ver Figura 7.18). Entretanto, estabelecendo-se as linhas de simetria e trabalhando-se em metade do domínio apenas, $C_5 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_{\eta-}$ não desaparece. Surge assim um falso termo fonte que deve ser eliminado. Isso é conseguido fazendo-se $\beta=0$ sobre a linha de simetria. Se $\beta=0$, então $C_5=0$, e a tensão cizalhante excedente desaparece. A malha é então gerada para metade do domínio apenas, e é assumida simétrica para a outra parte do domínio ("imagem refletida em

espelho"). Desta forma, independente de a malha ser ou não ortogonal na fronteira, o coeficiente β resulta nulo. Argumentação semelhante é válida para a velocidade u e para a temperatura.

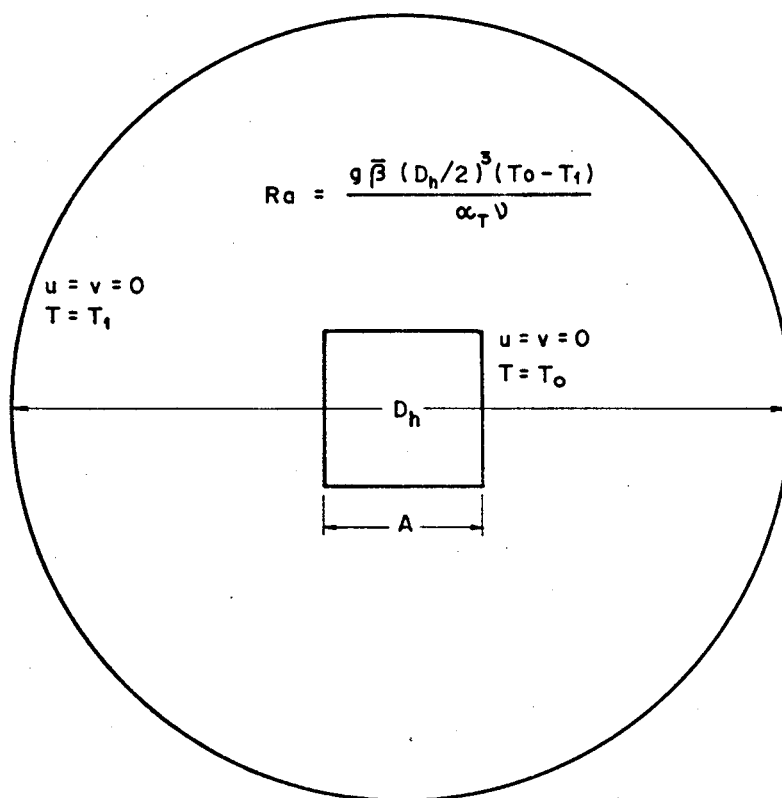


Figura 7.16 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar entre tubos isotérmicos concêntricos.

As condições de contorno para as linhas de simetria são $u=0$, $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ e $\frac{\partial T}{\partial x}=0$. Considerando que as fronteiras de simetria são linhas retas de η constante com a direção do eixo cartesiano y (ver Figura 7.18), e portanto normais ao eixo x , e considerando a reflexão especular da malha nas duas partes do domínio global, as condições de contorno de derivadas $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ e $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ podem ser transformadas para $\frac{\partial v}{\partial \eta}=0$ e $\frac{\partial T}{\partial \eta}=0$, respectivamente. Na Figura 7.17 mostra-se o domínio parcial sobre o qual os cálculos são executados, com as condições de contorno e os parâmetros geométricos de interesse.

Os resultados são obtidos para a malha não-ortogonal 9×16 da Figura 7.18 gerada sobre o domínio da Figura 7.17. Note-se que

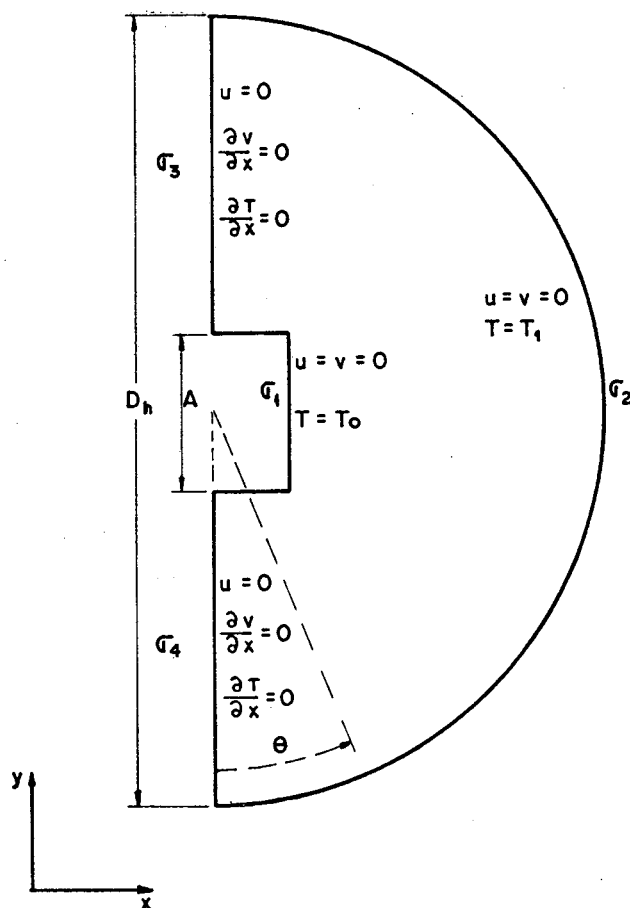


Figura 7.17 - Características geométricas e condições de contorno para o problema simétrico da convecção natural laminar entre tubos concêntricos isotérmicos.

a malha apresenta as feições desejáveis de concentração de linhas coordenadas nas fronteiras. A grade 9×16 é escolhida por ser semelhante em número de pontos àquela utilizada em [14], cuja solução, obtida pelo método de elementos finitos de Galerkin para a mesma geometria da Figura 7.17, é usada para comparações. Trabalha-se aqui com o parâmetro geométrico A/D_h fixo em 0,2, com A e D_h definidos na Figura 7.17. São encontradas soluções para números de Rayleigh na faixa 10^3 a 10^5 , e para número de Prandtl de 0,71.

As variáveis numéricas do modelo (sobrerelaxações, avanços de tempo, etc), critérios e tolerâncias de convergência, são os mesmos considerados para a solução da cavidade quadrada da seção anterior. As variáveis dependentes são adimensionalizadas da mesma forma que o são naquela seção. Ainda, devido à disparidade

geométrica de extensão entre as fronteiras isotérmicas, a temperatura de referência \bar{T} usada no cálculo das forças de flutuação é assumida como a média ponderada de todas as temperaturas do domínio no nível iterativo anterior, e é dada por

$$\bar{T} = \frac{\sum T_{ij} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_{ij}}}{\sum \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_{ij}}} , \quad (7.6)$$

onde o termo $\frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_{ij}}$ representa a área de cada célula elementar da malha gerada sobre o domínio de cálculos, e é obtido no Apêndice A.

Nos resultados obtidos para a cavidade quadrada, a troca de calor através das fronteiras foi expressa através de números de Nusselt. Nessa seção dá-se um enfoque diferente. Define-se coeficientes de condutibilidade térmica equivalente calculados ao longo das fronteiras sólidas. Os coeficientes de condutibilidade térmica equivalente locais são dados por

$$K_{eq} = \frac{q}{q_c} , \quad (7.7)$$

onde q e q_c são respectivamente, os fluxos de calor locais através das fronteiras para o caso presente e para o problema equivalente de condução pura (ou seja, com velocidades nulas em todo o domínio).

Define-se ainda o coeficiente global de condutibilidade térmica equivalente, dado por

$$\bar{K}_{eq} = \frac{\int_w q dw}{\int_w q_c dw} , \quad (7.8)$$

ou seja, dado pela relação entre o fluxo de calor global para o caso presente, e o fluxo de calor global para o caso de condução pura, calculados ao longo da fronteira considerada. Nas equações acima, q e q_c são dados por expressões semelhantes àquela da Equação (7.2).

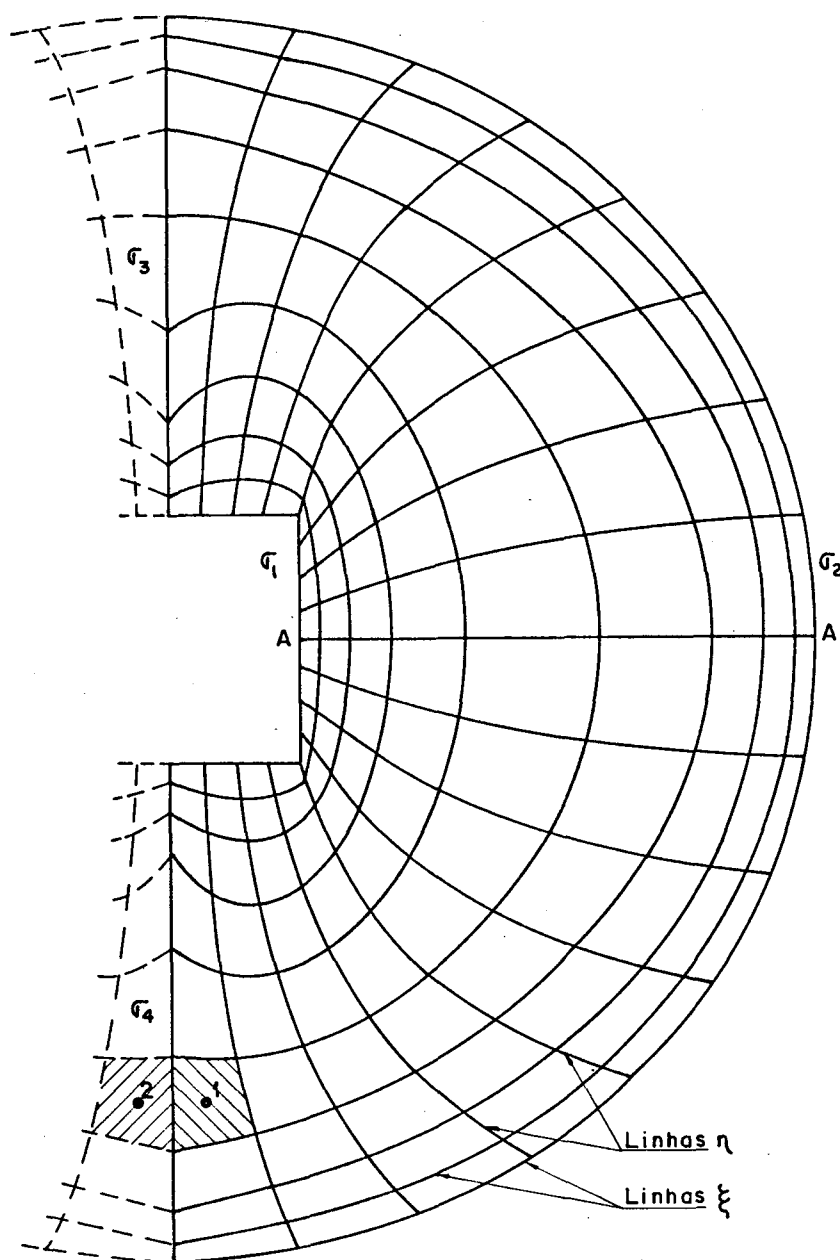


Figura 7.18 - Malha não-ortogonal 9x16 para o problema da convecção natural entre tubos concêntricos, com as fronteiras de simetria σ_3 e σ_4 .

As Tabelas 7.4 e 7.5 e a Figura 7.19 apresentam resultados obtidos para Rayleigh entre 10^3 e 10^5 e para Prandtl de 0,71. Os coeficientes globais de condutibilidade térmica equivalente na fronteira σ_2 da Figura 7.18 são comparados aos de [14] na Tabela 7.5. Como pode ser visto, os resultados estão em boa concordância. Note-se que quanto maior o número de Rayleigh, maior o va-

Tabela 7.4 - Perfis de velocidades u^* e v^* e temperatura T^* na seção AA da Figura 7.18 para $Pr = 0,71$ e $Ra = 10^3, 5 \times 10^3, 10^4, 5 \times 10^4$ e 10^5 .

R_a	x^*	0,2157	0,2534	0,3085	0,4010	0,5657	0,7555	0,8704	0,9451	0,9847
10^3	u^*	-0,0012	-0,0076	-0,0276	-0,0816	-0,1389	-0,1256	-0,0621	-0,0173	-0,0025
	v^*	0,9146	2,5580	3,8818	4,2234	0,9409	-3,5553	-3,0659	-1,7860	-0,5777
	T^*	0,9678	0,8978	0,8022	0,6771	0,4053	0,1928	0,0896	0,0403	0,0117
5×10^3	u^*	-0,0345	-0,1991	-0,6009	-1,4050	-1,9880	-1,6260	-0,7811	-0,2145	-0,0311
	v^*	4,4641	11,862	16,838	16,483	2,4848	-13,173	-11,817	-6,9257	-2,2472
	T^*	0,9517	0,8447	0,7076	0,5463	0,3109	0,1912	0,0924	0,0418	0,0121
10^4	u^*	-0,0915	-0,0508	-1,4470	-3,0940	-4,0560	-3,1770	-1,5100	-0,4179	-0,6060
	v^*	8,1526	20,548	27,199	23,836	25,967	-18,388	-18,477	-11,113	-3,6588
	T^*	0,9389	0,8036	0,6355	0,4561	0,2644	0,2053	0,1038	0,0472	0,0137
5×10^4	u^*	-0,4265	-2,1530	-5,4650	-9,5070	-10,300	-6,9850	-3,2260	-1,0890	-0,1710
	v^*	26,891	56,097	57,270	34,103	44,890	-25,447	-47,974	-34,436	-12,426
	T^*	0,9064	0,7000	0,4738	0,3022	0,2337	0,2527	0,1554	0,0725	0,0210
10^5	u^*	-0,7158	-3,3720	-8,0660	-12,910	-13,310	-8,6230	-4,0030	-1,6020	-0,2736
	v^*	43,037	80,008	69,018	32,735	6,3607	-22,329	-68,279	-56,568	-21,724
	T^*	0,8901	0,6498	0,4093	0,2630	0,2318	0,2646	0,1832	0,0873	0,0278

lor de K_{eq} , pois mais intenso é o processo convectivo. Na Tabela 7.4 apresenta-se os perfis de u^* , v^* e T^* sobre a linha média horizontal (seção AA) da Figura 7.18. Estes resultados são expres-

Tabela 7.5 - Coeficientes globais de condutibilidade térmica equivalente na fronteira σ_2 da Figura 7.18, para $Pr = 0,71$. Em [14], $Pr = 0,708$.

R_a	10^3	5×10^3	10^4	5×10^4	10^5	
K_{eq}	1,014	1,326	1,614	2,384	2,802	
	1,003	1,346	1,644	2,457	2,846	[14]

sos nessa forma para permitir comparações de resultados que eventualmente outros pesquisadores venham a obter para a mesma geome-

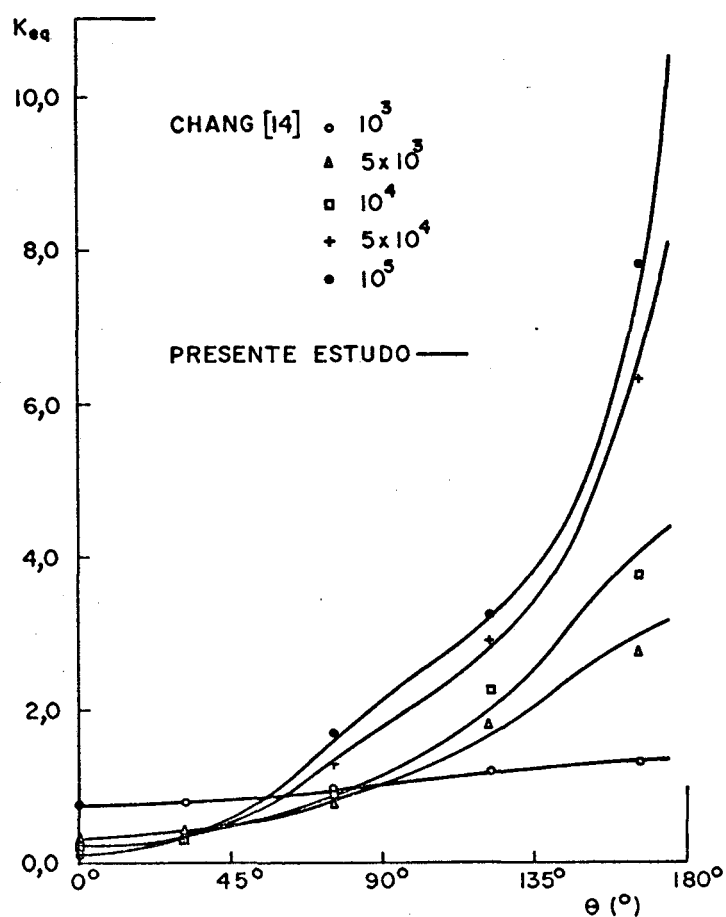


Figura 7.19 - Perfis de K_{eq} ao longo da fronteira direita para a cavidade da Figura 7.17.

tria. Ainda, devido à pequena quantidade de pontos considerada ao longo da seção AA, os perfis gráficos são preteridos por não permitirem boa representatividade.

A Figura 7.19 mostra os perfis do coeficiente de condutibilidade térmica equivalente local ao longo da fronteira σ_2 , dado em função do ângulo θ medido a partir da fronteira σ_4 . Evidentemente os valores de K_{eq} crescem com o crescimento da convecção local ao longo da fronteira considerada. Note-se que, em consequência do sentido do fluxo hidrodinâmico na cavidade, o processo convectivo (e consequentemente, K_{eq}) cresce com o aumento do número de Rayleigh na região superior da cavidade, e é inversamente proporcional a esse aumento na sua base. Como pode ser visto, os resultados apresentam-se em boa concordância com os de Chang [14], exceto para Rayleigh igual a 5×10^3 e 10^4 na região superior da cavidade. Deve-se considerar que na Figura 7.19 compara-se soluções teóricas, sendo recomendado a confrontação destas com dados experimentais. Por fim, o fato de os resultados de Chang terem sido obtidos para $Pr = 0,708$, e não 0,71 como no caso presente, em nada prejudica as comparações.

7.5 - RESULTADOS PARA UMA CAVIDADE IRREGULAR

Nesta seção expõe-se os resultados numéricos obtidos para o problema da convecção natural laminar em uma cavidade arbitrária. As condições de contorno assumidas são as mesmas consideradas para as cavidades quadradas: duas fronteiras opostas adiabáticas, sendo as outras duas isotérmicas a temperaturas diferentes; e contornos sólidos. A Figura 7.20 mostra a geometria da cavidade e as condições de contorno consideradas. As soluções são estabelecidas sobre a malha não-ortogonal 26×26 mostrada na Figura 7.21. As variáveis numéricas do modelo (sobrerelaxações, avanços de tempo, etc), critérios e tolerâncias de convergência são mantidos os mesmos usados nas Seções 7.3 e 7.4.

A temperatura de referência considerada na avaliação das forças de flutuação é assumida como a média ponderada de todas as temperaturas do domínio em nível iterativo anterior.

No caso das cavidades irregulares, há que se estabelecer algum critério para determinar o parâmetro geométrico necessário

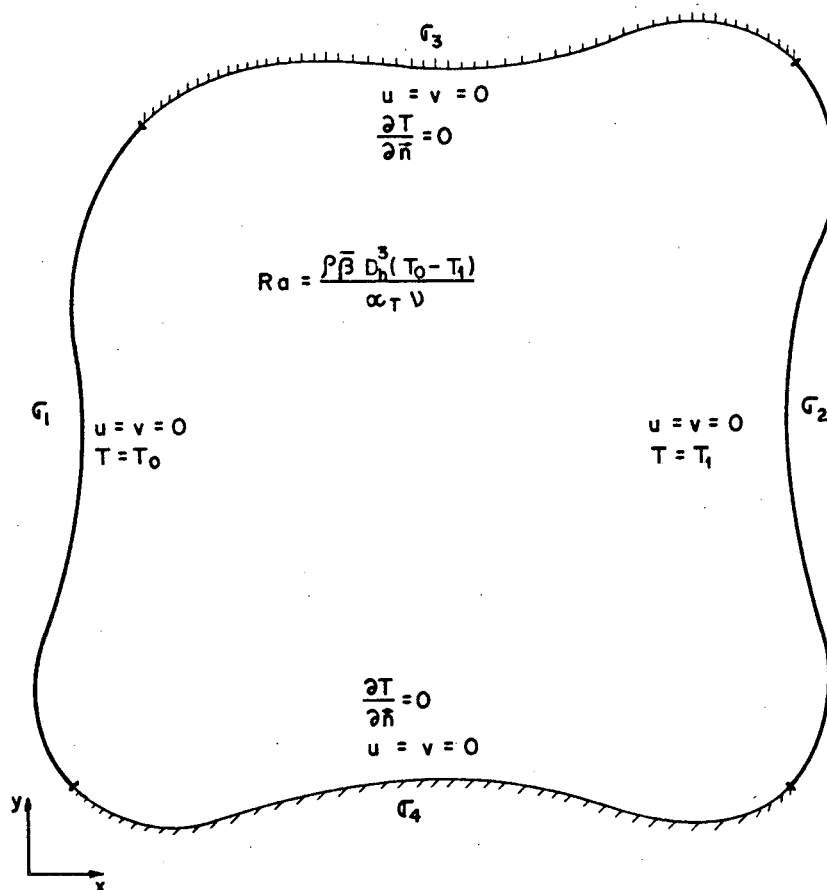


Figura 7.20 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar em cavidade irregular.

para o cálculo do número de Rayleigh. O parâmetro aqui usado é o diâmetro hidráulico, o qual é definido como

$$D_h = 4 \cdot \frac{\text{Área da cavidade}}{\text{Perímetro da cavidade}} \quad (7.9)$$

Note-se que quando se está tratando com cavidades quadradas, D_h reduz-se ao comprimento dos lados.

A área da cavidade é dada pelo somatório das áreas das células elementares da malha, e vale

$$\text{Área} = \sum \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_{ij}} \quad (7.10)$$

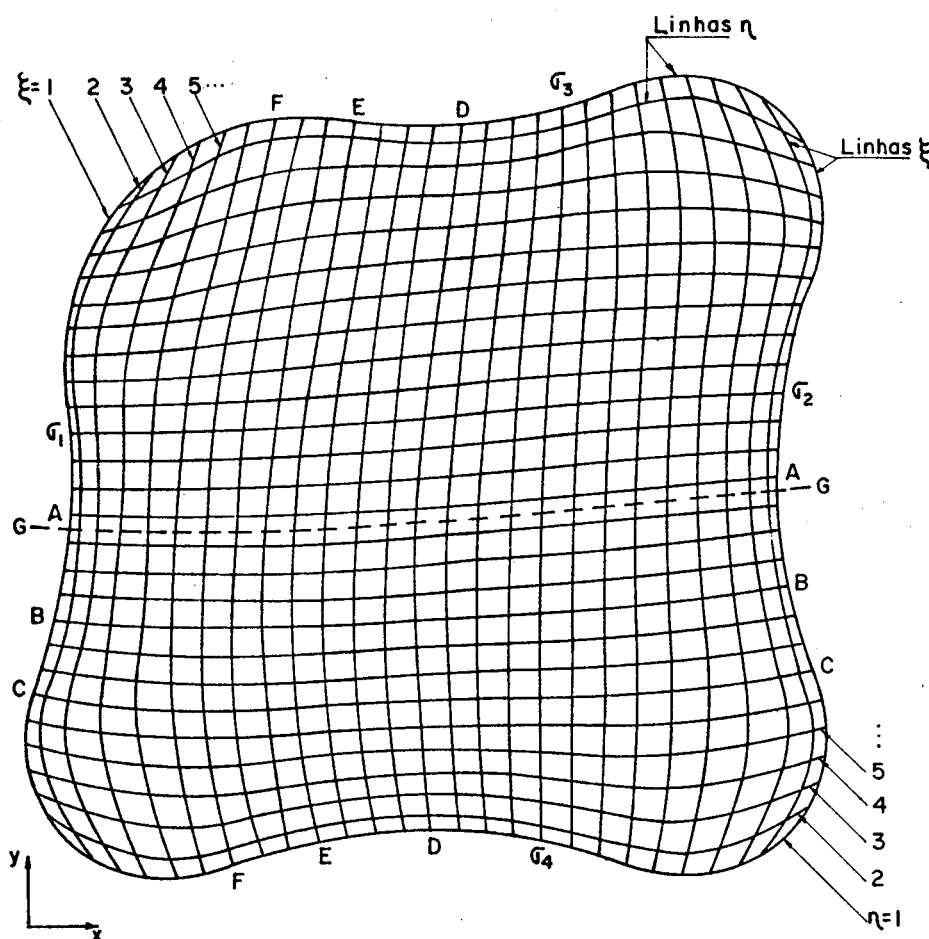


Figura 7.21 - Malha não-ortogonal 26x26 para a cavidade irregular.

O perímetro é dado pelo somatório dos comprimentos das faces das células elementares que definem os contornos, e vale

$$\text{Perímetro} = \sum \sqrt{\alpha_j} \Delta \eta + \sum \sqrt{\gamma_i} \Delta \xi, \quad (7.11)$$

onde os dois termos representam, respectivamente, os comprimentos das fronteiras de ξ constante, e de η constante. Para melhor compreensão das Equação (7.10) e (7.11), ver Apêndice A.

Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 7.22 a 7.31 e nas Tabelas 7.6 a 7.9. Nas Figuras 7.22 a 7.25 apresentam-se perfis de velocidades v^* ao longo das seções AA, BB e CC (linhas de η constante) da Figura 7.21, para os vários números de Rayleigh. Nas Figuras 7.26 a 7.29 estão plotados os perfis de u^*

ao longo das seções DD, EE e FF (linhas de ξ constante). Em vários destes gráficos pode-se perceber facilmente as regiões de recirculação no domínio.

Na Figura 7.30 mostra-se os perfis de temperatura na seção GG da Figura 7.21 para os vários números de Rayleigh. A Figura 7.31 mostra os perfis de número de Nusselt ao longo da fronteira σ_1 da cavidade arbitrária. Considerando o caráter irregular das linhas coordenadas no domínio, os resultados gráficos são todos apresentados em função de ξ ou η , de modo a se poder estabelecer perfis das variáveis dependentes sobre linhas de coordenadas constantes.

É fato evidente que existem dificuldades quanto à colocação dos resultados para cavidades arbitrárias pela própria conformação geométrica irregular que apresentam. A especificação de critérios para a exposição de soluções de modo a permitir que vários autores confrontem seus resultados é ainda uma questão em aberto. Apresenta-se aqui alguns resultados em forma de tabelas para viabilizar tais comparações. São eles: Tabela 7.6, relacionando os números de Nusselt médios ao longo da fronteira σ_1 ; Tabela 7.7, onde apresenta-se perfis de T^* nos pontos de temperatura localizados sobre a seção GG da Figura 7.21; Tabela 7.8, mostrando os valores de v^* nos pontos de velocidades sobre a seção AA da Figura 7.21; e Tabela 7.9, relacionando os valores de u^* nos pontos de velocidade sobre a seção DD da Figura 7.21.

Tabela 7.6 - Números de Nusselt médios ao longo da fronteira σ_1 para $R_a = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 . $Pr = 0,71$.

R_a	10^3	10^4	10^5	10^6
Nu_o	1,282	2,621	5,399	10,61

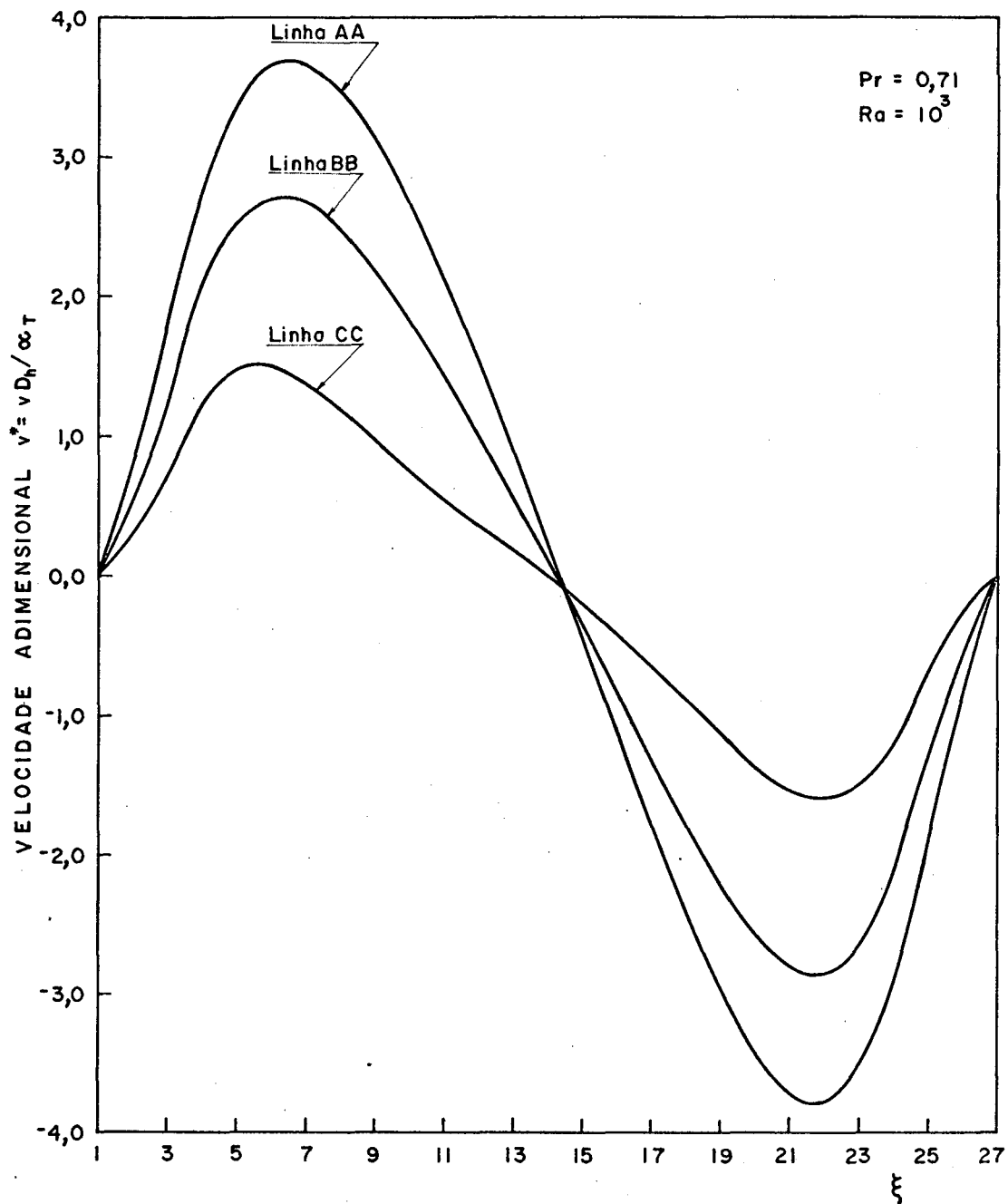


Figura 7.22 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas AA, BB e CC da Figura 7.21. $R_a = 10^3$; $Pr = 0,71$.

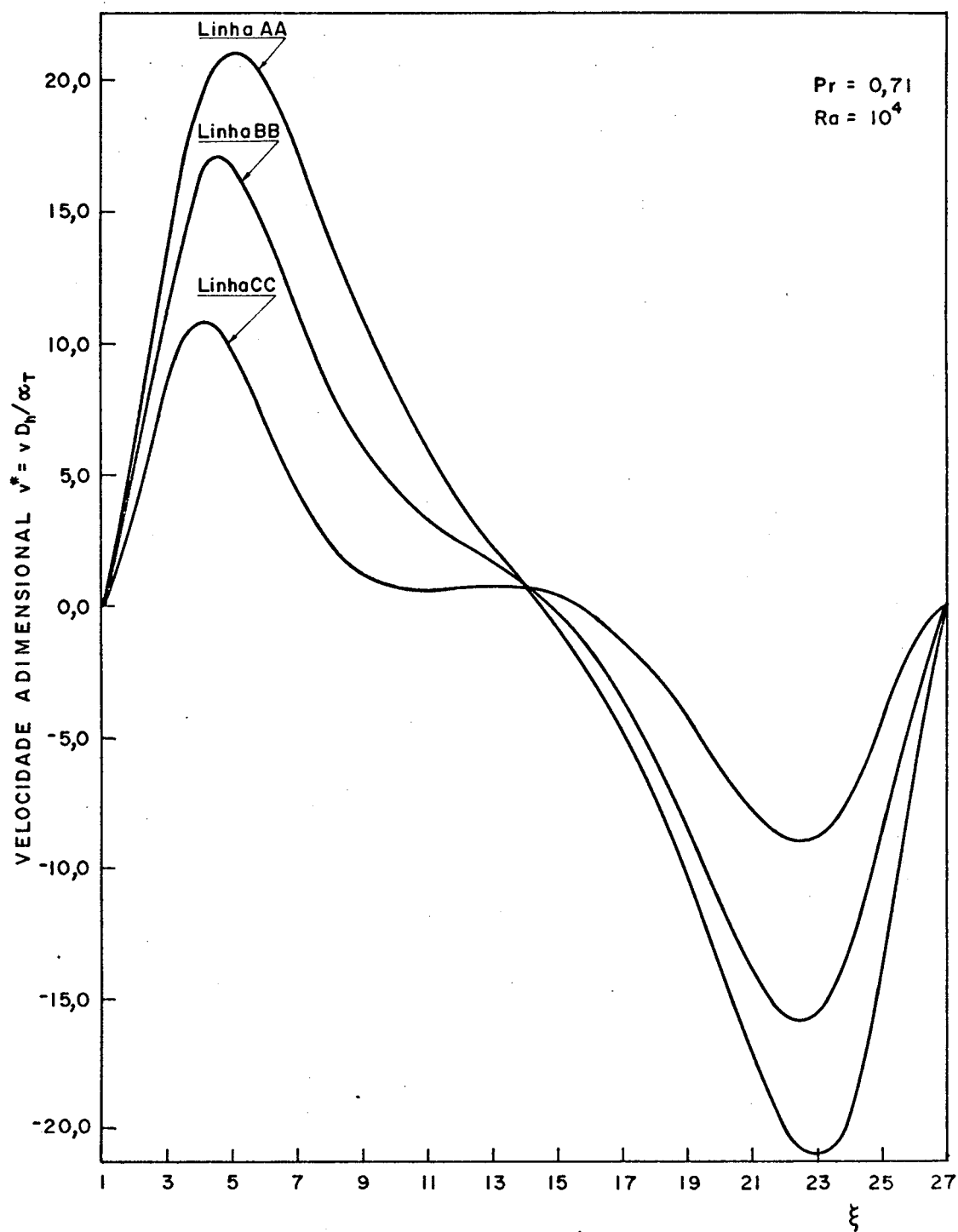


Figura 7.23 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas AA, BB e CC da Figura 7.21. $R_a = 10^4$; $Pr = 0,71$.

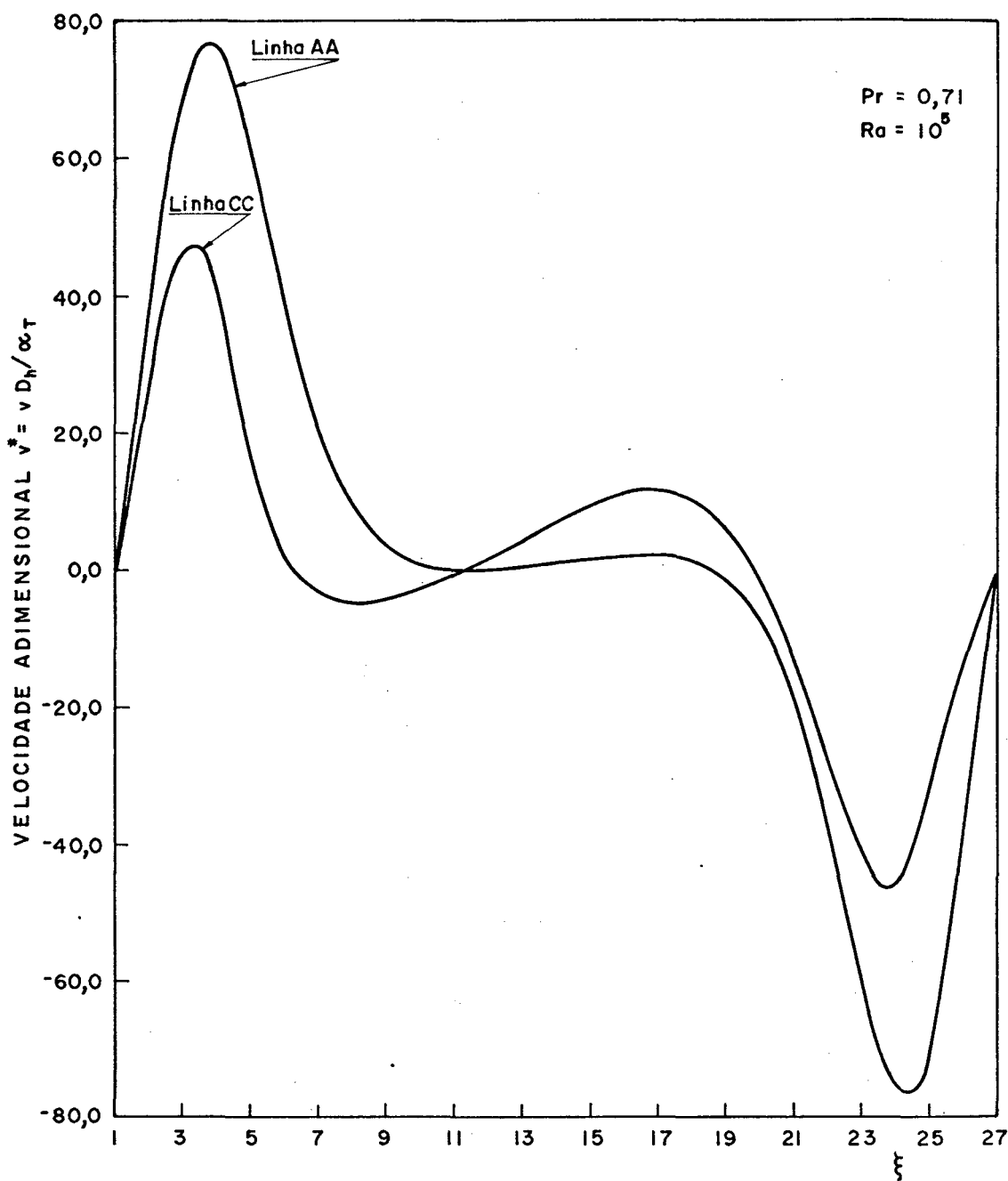


Figura 7.24 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas AA e CC da Figura 7.21. $R_a = 10^5$; $Pr = 0,71$.

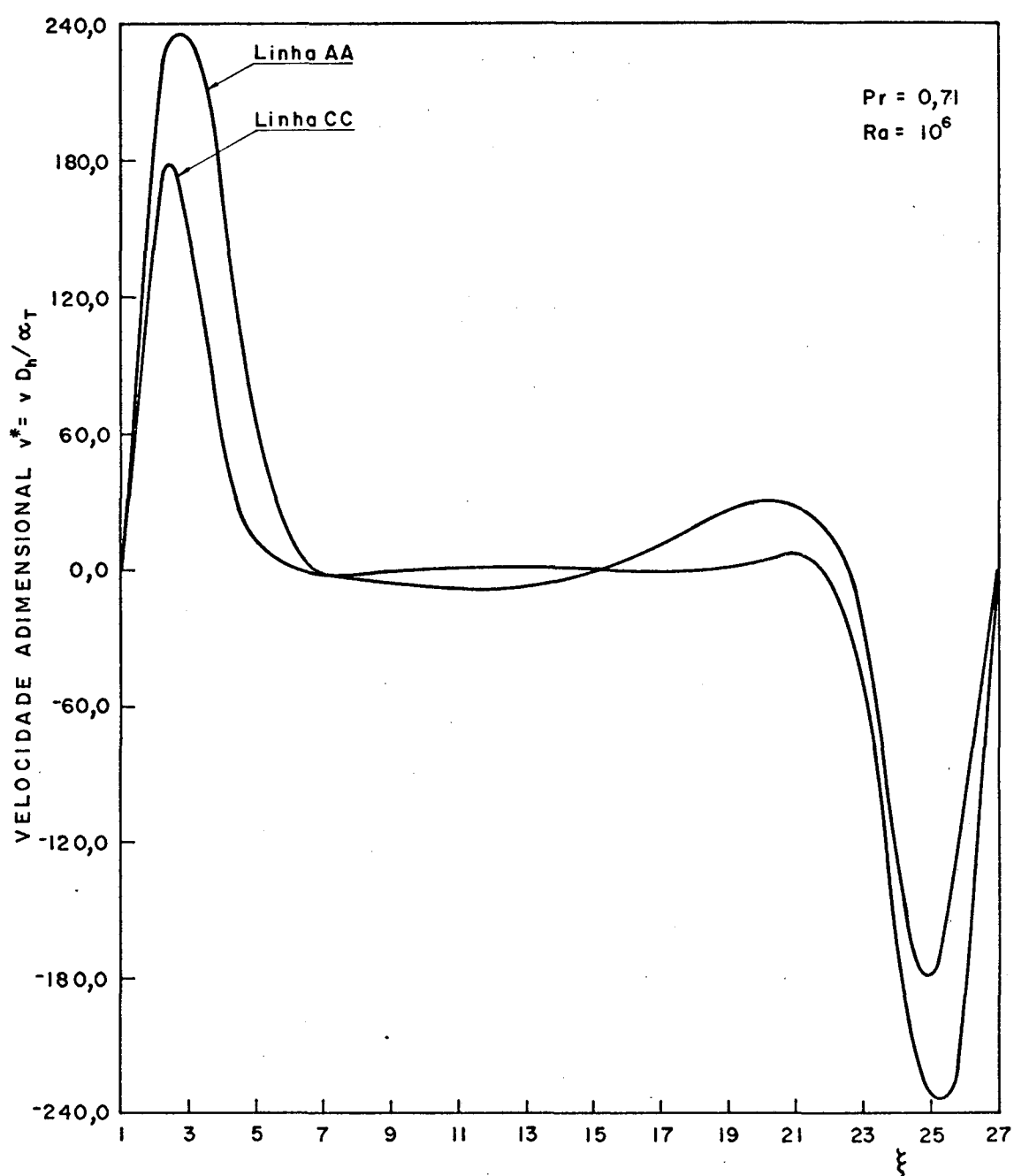


Figura 7.25 - Perfis de velocidade v^* ao longo das linhas AA e CC da Figura 7.21. $R_a = 10^6$; $Pr = 0,71$.

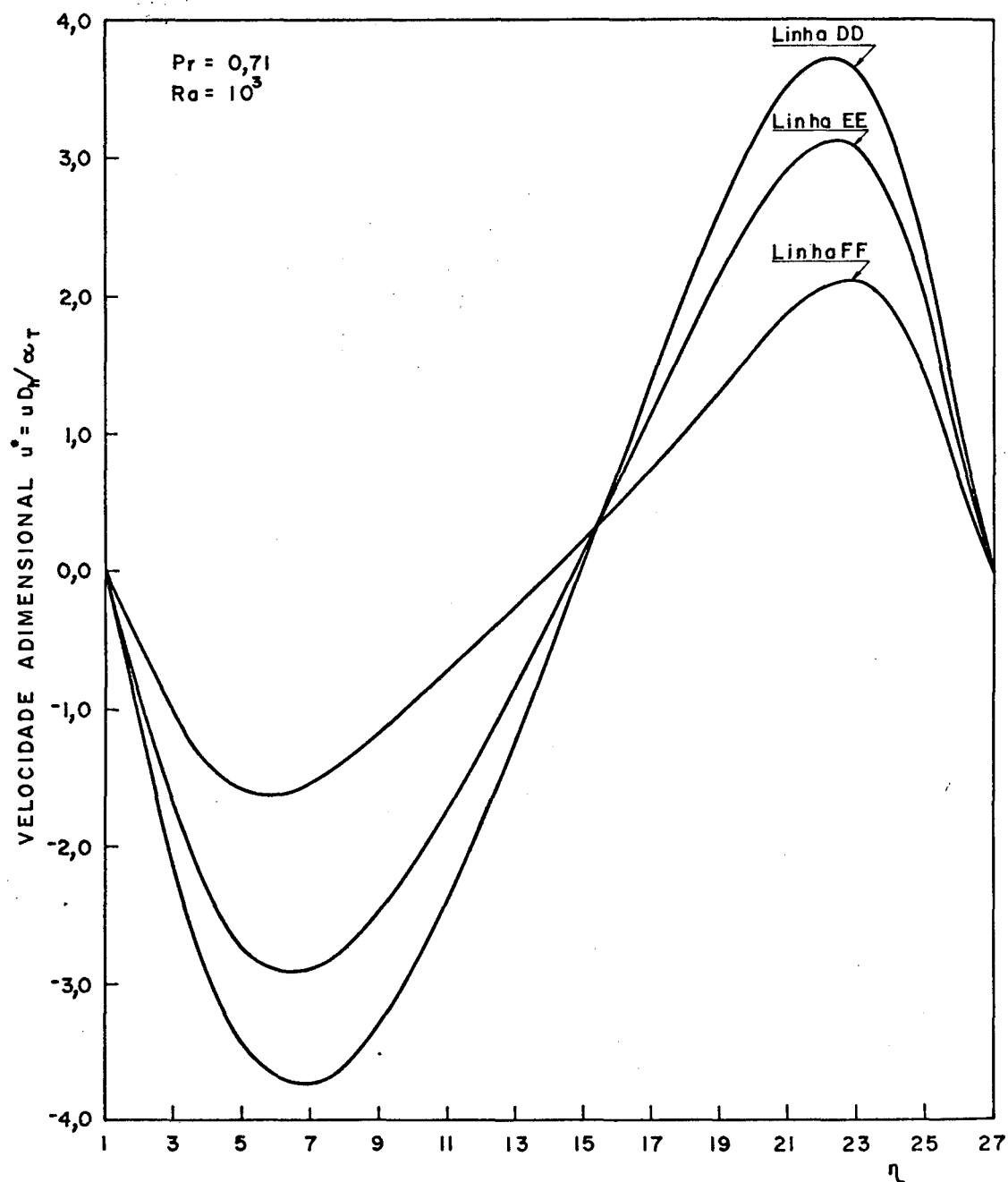


Figura 7.26 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas DD, EE e FF da Figura 7.21. $R_a = 10^3$; $Pr = 0,71$.

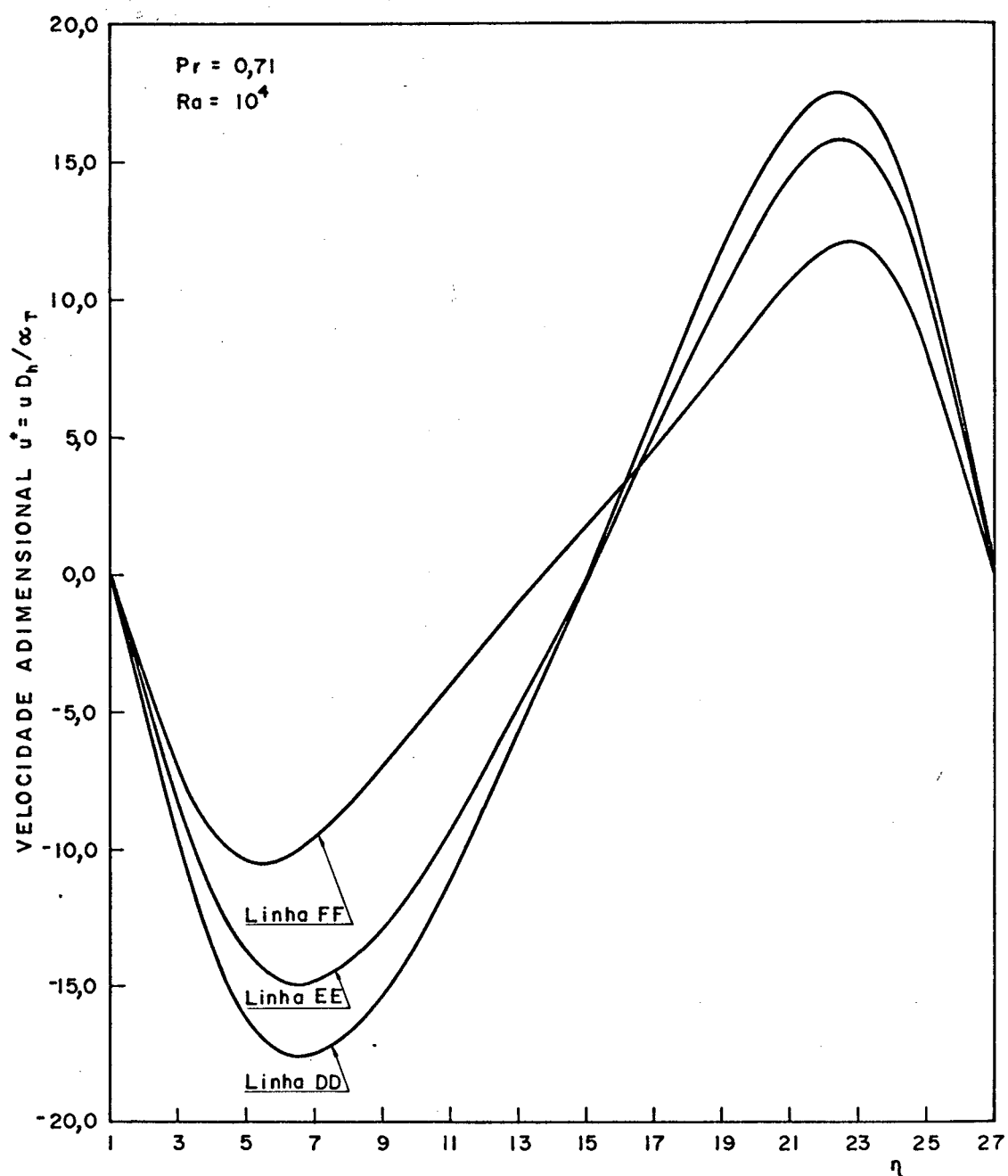


Figura 7.27 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas DD, EE e FF da Figura 7.21. $Ra = 10^4$; $Pr = 0,71$.

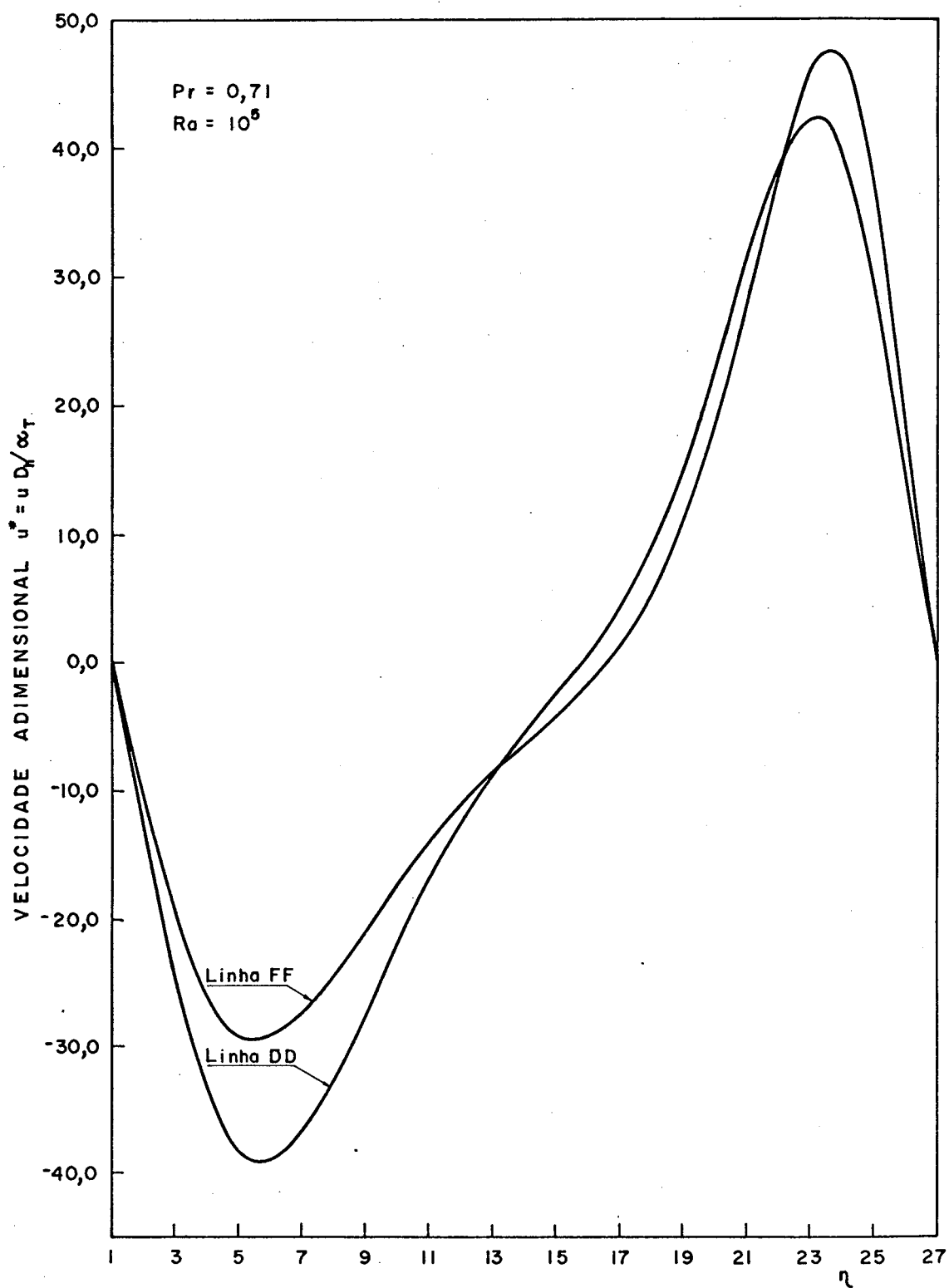


Figura 7.28 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas DD e FF da Figura 7.21. $R_a = 10^5$; $Pr = 0,71$.

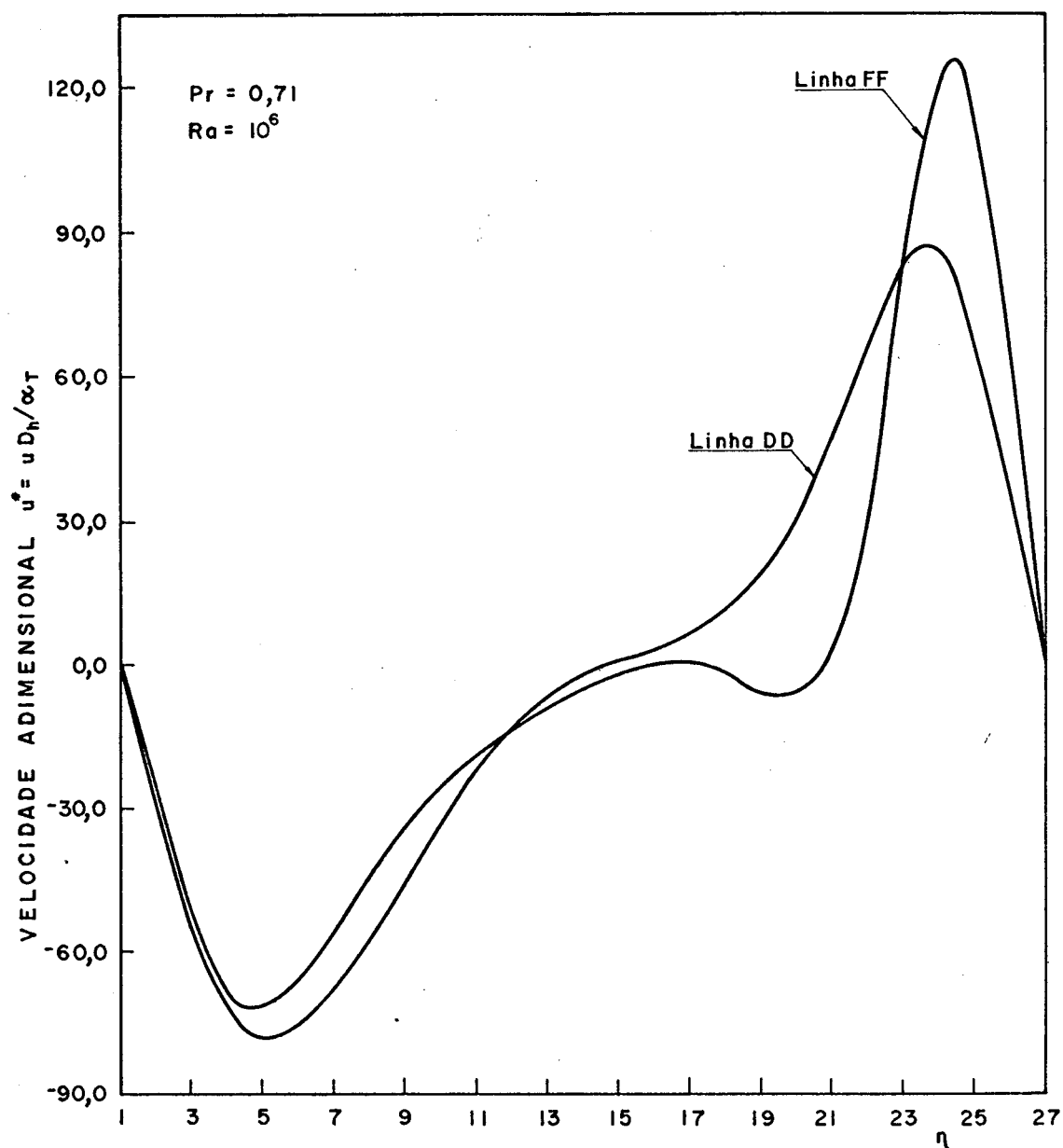


Figura 7.29 - Perfis de velocidade u^* ao longo das linhas DD e FF da Figura 7.21. $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$.

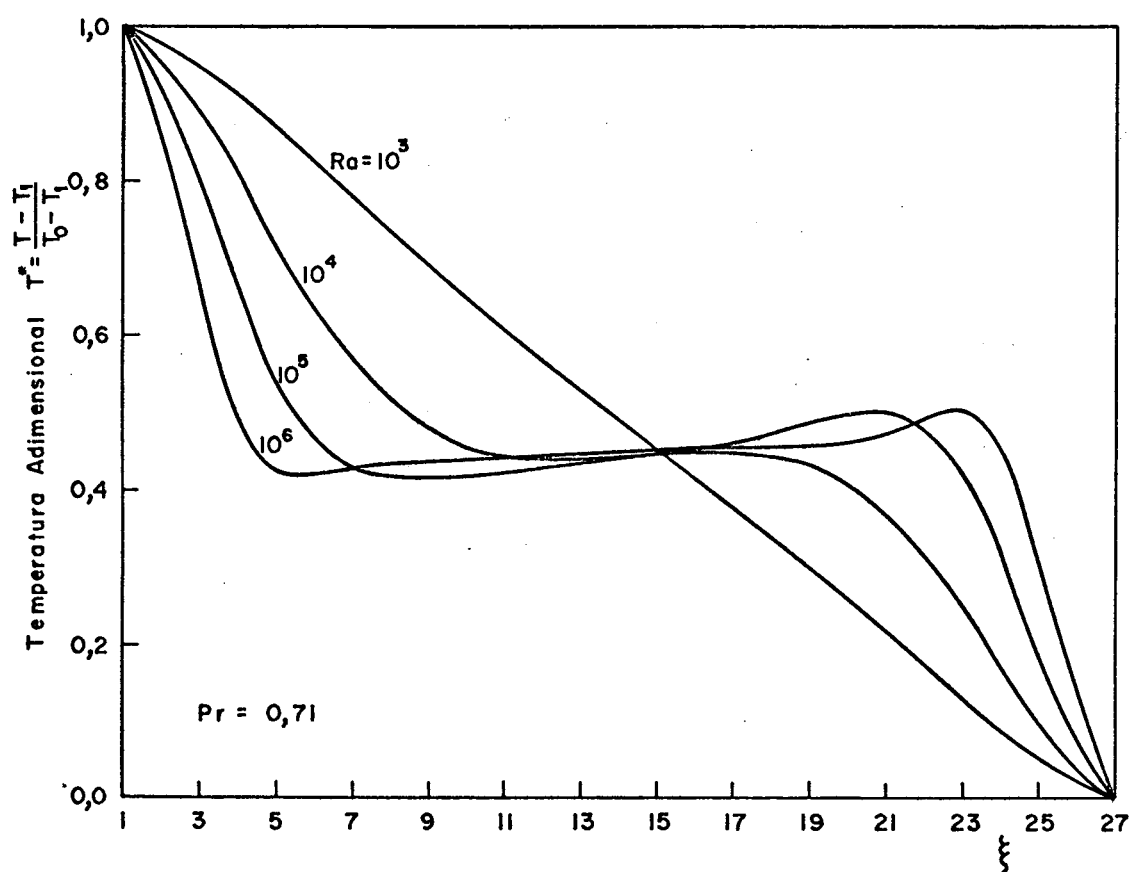


Figura 7.30 - Perfis de temperatura ao longo da linha GG da Figura 7.21. $R_a = 10^3$, 10^4 , 10^5 e 10^6 ; $Pr = 0,71$.

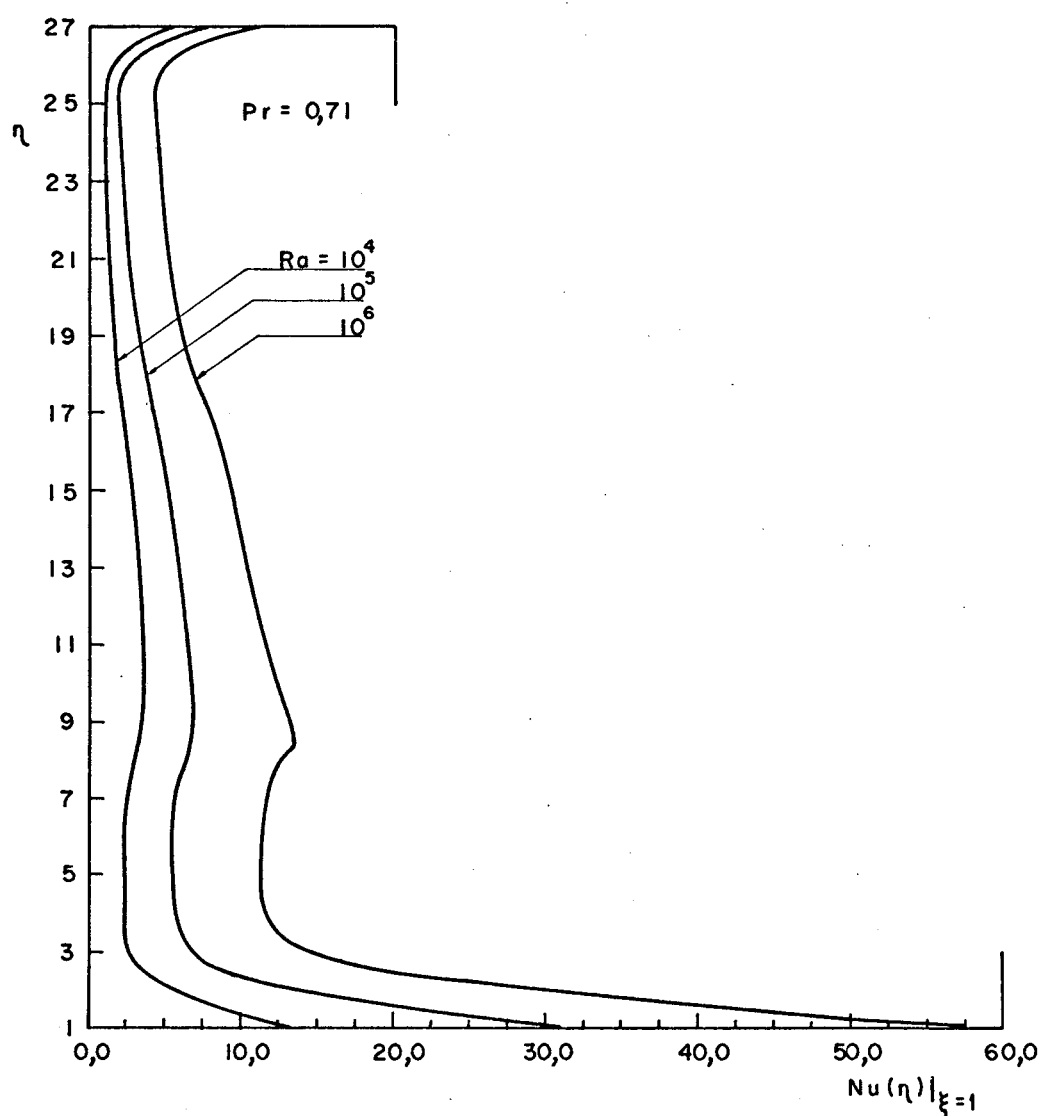


Figura 7.31 - Perfis de número de Nusselt ao longo da fronteira σ_1 da cavidade irregular. $R_a = 10^4$, 10^5 e 10^6 ; $Pr = 0,71$

Tabela 7.7 - T^* nos pontos de temperatura na seção GG da Figura 7.21 para $R_a = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 (sentido da esquerda para a direita). $Pr = 0,71$.

R_a	10^3	10^4	10^5	10^6
Direita + Esquerda	0,9903	0,9785	0,9610	0,9314
	0,9663	0,9252	0,8640	0,7615
	0,9312	0,8479	0,7278	0,5606
	0,8894	0,7592	0,5925	0,4477
	0,8451	0,6729	0,4954	0,4210
	0,8001	0,5979	0,4423	0,4259
	0,7552	0,5384	0,4210	0,4325
	0,7110	0,4953	0,4165	0,4356
	0,6677	0,4668	0,4186	0,4371
	0,6256	0,4500	0,4225	0,4385
	0,5847	0,4419	0,4265	0,4404
	0,5450	0,4397	0,4303	0,4428
	0,5063	0,4413	0,4345	0,4456
	0,4683	0,4446	0,4395	0,4486
	0,4307	0,4482	0,4460	0,4514
	0,3930	0,4501	0,4546	0,4540
	0,3548	0,4482	0,4656	0,4560
	0,3158	0,4398	0,4785	0,4575
	0,2758	0,4217	0,4916	0,4596
	0,2346	0,3907	0,4994	0,4697
	0,1922	0,3443	0,4914	0,4800
	0,1491	0,2825	0,4518	0,4987
	0,1061	0,2084	0,3673	0,4889
	0,0655	0,1308	0,2440	0,3909
	0,0316	0,0635	0,1201	0,2086
	0,0090	0,0181	0,0342	0,0597

Tabela 7.8 - v^* nos pontos de velocidade na seção AA da Figura 7.21 para $R_a = 10^3, 10^4, 10^5$, e 10^6 (sentido da esquerda para a direita). $Pr = 0,71$.

R_a	10^3	10^4	10^5	10^6
Direita + Esquerda	0,3801	3,1177	18,358	96,555
	1,2904	10,183	54,585	235,47
	2,3082	17,051	76,302	213,37
	3,1000	20,720	69,796	106,67
	3,5495	20,881	48,831	30,886
	3,6895	18,758	28,156	2,1961
	3,5862	15,626	13,748	-2,8388
	3,3013	12,361	5,6220	-1,4589
	2,8850	9,4132	1,7487	0,1270
	2,3759	6,9228	0,2500	0,8399
	1,8024	4,8508	-0,0583	0,9700
	1,1849	3,0782	0,1984	0,8457
	0,5380	1,4637	0,7120	0,6043
	-0,1269	-1,3141	1,3148	0,2590
	-0,7991	-0,1839	1,8651	-0,2021
	-1,4658	-3,7869	2,1639	-0,7216
	-2,1095	-6,0917	1,8500	-1,0148
	-2,7048	-8,8431	0,2390	-0,4208
	-3,2159	-12,050	-3,8985	1,8788
	-3,5940	-15,546	-12,461	5,2584
	-3,7757	-18,850	-27,491	3,0492
	-3,6839	-21,043	-48,976	-24,368
	-3,2377	-20,788	-70,620	-103,31
	-2,4021	-16,873	-76,703	-214,71
	-1,3247	-9,8549	-53,574	-233,21
	-0,3843	-2,9591	-17,592	-92,312

Tabela 7.9 - u^* nos pontos de velocidade na seção DD da Figura 7.21 para $R_a = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 (sentido do topo para a base). $Pr = 0,71$.

R_a	10^3	10^4	10^5	10^6
Base + Topo	0,5854	2,7428	7,0338	16,898
	1,7660	8,3938	22,145	50,636
	2,8074	13,454	35,764	79,659
	3,4491	16,514	42,191	85,643
	3,6935	17,545	41,160	74,093
	3,6277	17,025	35,236	56,366
	3,3376	15,435	27,180	38,982
	2,8915	13,154	19,050	24,900
	2,3409	10,458	12,019	14,938
	1,7240	7,5441	6,4793	8,5951
	1,0688	4,5399	2,2742	4,7007
	0,3966	1,5256	-1,0366	0,1928
	-0,2761	-1,4505	-3,9706	-0,8758
	-0,9349	-4,3551	-6,9947	-4,6272
	-1,5662	-7,1555	-10,463	-10,074
	-2,1552	-9,8075	-14,581	-17,725
	-2,6850	-12,247	-19,385	-27,632
	-3,1353	-14,385	-24,701	-39,218
	-3,4822	-16,101	-30,120	-51,412
	-3,6977	-17,242	-34,972	-62,929
	-3,7489	-17,622	-38,340	-72,350
	-3,5988	-17,025	-39,119	-77,809
	-3,2069	-15,227	-36,215	-76,521
	-2,5379	-12,050	-28,962	-65,178
	-1,5993	-7,5609	-17,945	-42,841
	-0,5448	-2,5562	-5,8980	-14,657

7.6 - CONCLUSÕES E SUMÁRIO

Nesse capítulo o modelo numérico foi testado e os resultados foram apresentados. Inicialmente realizou-se um teste apenas hidrodinâmico, comparando-se resultados obtidos para o problema da cavidade quadrada com parede inferior em movimento à solução de Maliska. Houve ótima concordância, tanto para o caso de difusão predominante quanto para o caso de convecção predominante. O problema da convecção natural em cavidade quadrada foi resolvido usando tanto malha ortogonal quanto não-ortogonal. Verificou-se muito boa concordância entre os resultados obtidos para as duas malhas, concluindo-se pela correção do modelo construído para coordenadas generalizadas. Ainda, a solução obtida mostrou-se muito boa quando comparada à "solução de referência" de Davis. Resolveu-se o problema da convecção natural para a seção transversal de uma região anular formada por um tubo quadrado envolvido de maneira concêntrica por um tubo cilíndrico, usando malha não-ortogonal. Por ser simétrico, foi resolvido apenas em metade de seu domínio. Os resultados obtidos mostraram-se bastante satisfatórios em relação aos de Chang. Por fim, apresentou-se a solução para o problema da convecção natural em uma cavidade arbitrária. Os resultados mostraram-se coerentes, sendo alguns listados em forma de tabelas para servir de comparativo para outros pesquisadores.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

8.1 - SUMÁRIO

O objetivo principal desta dissertação foi o desenvolvimento de uma metodologia numérica para a solução de problemas bidimensionais de convecção natural em cavidades arbitrárias. Como ponto de partida utilizou-se o modelo numérico desenvolvido em [1] para a solução de problemas tridimensionais parabólicos de mecânica dos fluidos. Nesta dissertação, o modelo foi simplificado para duas dimensões, introduzindo-se a equação da energia e o termo forças de flutuação nas equações de movimento para resolver problemas de convecção natural.

O modelo foi desenvolvido utilizando-se um sistema de coordenadas generalizadas coincidente com a fronteira da região de cálculos de maneira a evitar interpolações das condições de contorno.

O termo forças de flutuação foi deduzido com base na aproximação de Boussinesq, que considera a massa específica constante em todos os termos, exceto no de flutuação. Assim, o problema é tratado em formulação incompressível, já comentada no texto. A validade da aproximação de Boussinesq foi discutida no Capítulo 3.

Uma das virtudes principais do modelo desenvolvido em [1] é a estabilidade numérica do algoritmo. Este caráter manteve-se após a introdução das modificações consideradas nesta dissertação.

São as seguintes as principais características do modelo em questão

- (a) - O sistema de equações governantes é resolvido em domínio transformado. As velocidades cartesianas são mantidas como variáveis dependentes durante a transformação. Após a discretização das equações de movimento, as velocidades contravariantes são introduzidas como variáveis dependentes.

- (b) - Apenas uma das equações de movimento é resolvida sobre cada face dos volumes de controle para a continuidade: exatamente aquela cuja variável dependente é a velocidade contravariante normal à face considerada. Esta velocidade é então determinada a partir da equação de movimento e está sujeita à satisfação da continuidade. As velocidades contravariantes não calculadas em dada face do elemento são determinadas por média aritmética das vizinhas calculadas.
- (c) - O termo forças de flutuação das equações de movimento é obtido pela aproximação de Boussinesq. A temperatura de referência necessária à sua determinação é assumida como a temperatura média ponderada sobre todo o domínio de cálculos, e é renovada após cada iteração global do processo de solução.
- (d) - As variáveis dependentes são calculadas segundo arranjo de grade deslocado. As localizações dos pontos de pressão e velocidades fazem com que a equação de Poisson para a pressão, à 9 pontos, resulte fortemente dependente dos quatro pontos de pressão paralelos adjacentes, e fracamente dependente dos diagonais. Esse fato permite sua solução por métodos "ponto por ponto", "linha por linha", etc... Ainda, a equação de pressão assume estrutura à 5 pontos quando qualquer grade ortogonal é usada.
- (e) - No ciclo iterativo global, as equações de energia e pressão são resolvidas implicitamente, enquanto a solução para as equações de movimento é encontrada explicitamente. A solução do acoplamento pressão-velocidade usando o método PRIME impõe estes esquemas para as equações de pressão e movimento, sendo que esta última é estruturada de forma tal que impede a obtenção de soluções transientes reais.

A metodologia desenvolvida e os resultados numéricos obtidos e comparados com aqueles disponíveis na literatura mostram a gran

de versatilidade e aplicabilidade de modelos que envolvem coordenadas não ortogonais coincidentes com o domínio de cálculos. A única restrição que até há pouco existia com relação ao método de diferenças finitas para aplicação em geometrias irregulares foi removida com o uso deste tipo de sistema de coordenadas. Desta maneira, parece bastante claro que a generalização completa dos modelos numéricos para a solução de problemas de transferência de calor em fluidos segue este direcionamento.

8.2 - CONTRIBUIÇÕES DESTA DISSERTAÇÃO

A principal contribuição desta dissertação foi o desenvolvimento de um método numérico para o tratamento do problema da convecção natural laminar sobre cavidades irregulares. A literatura disponível é especialmente pobre neste campo específico, embora haja a tendência do surgimento de novos trabalhos. Algumas outras contribuições foram

- (a) - A aplicação de uma modelagem construída e testada apenas para problemas hidrodinâmicos, a casos envolvendo também transporte de energia.
- (b) - Um teste efetivo para o problema da convecção natural em cavidades quadradas, dentro do regime laminar, usando o grade ortogonal e não-ortogonal.
- (c) - Uma discussão a respeito da aproximação de Boussinesq, enfocando também alguns caminhos alternativos para obtenção de expressão matemática para o termo forças de flutuação.
- (d) - A apresentação de resultados para uma cavidade irregular específica, com o fim de servir de termo de comparação para soluções que venham a ser obtidas por outros autores para a mesma geometria.

8.3 - SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

São vários os desenvolvimentos que podem ser executados de

modo a dar continuidade às pesquisas nesta linha de trabalho. Alguns destes tópicos são agora relacionados

- (a) - Nesta dissertação, as aproximações em diferenças finitas das equações de conservação foram executadas segundo o esquema WUDS. Considerando em adição que a direção do fluxo hidrodinâmico na cavidade não está alinhada às linhas coordenadas naturais, há a ocorrência de falsa difusão [20]. É de interesse verificar seus efeitos sobre os resultados, estabelecendo-se a ordem dos desvios provocados.
- (b) - Um item a ser verificado é a possibilidade de utilização de pontos fictícios na consideração das condições de contorno para a equação de energia. Tanto sob o ponto de vista da estabilidade e comportamento de convergência do modelo, quanto sob a ótica do cálculo dos números de Nusselt nas fronteiras (evitando as aproximações parabólicas empregadas neste trabalho), esta questão enseja maiores estudos.
- (c) - A introdução dos elementos necessários para que o modelo aqui apresentado passe a abranger também casos de turbulência é uma tarefa em aberto. Considerando a grande aplicabilidade dos modelos turbulentos aos casos práticos de engenharia, esta expansão do modelo seria de importância inquestionável.
- (d) - A realização de experimentos para a obtenção de resultados de convecção natural sobre cavidades irregulares seria sem dúvidas um elemento fundamental em termos de apresentação de resultados práticos, contribuindo ainda para a avaliação de modelos numéricos como o presente construído.
- (e) - Uma expansão do modelo numérico apresentado nesta dissertação para o caso de cavidades tridimensionais elípticas é uma questão que merece maiores considerações.

Um tal modelo exigiria a geração de malhas tridimensionais, além da introdução de uma equação de movimento adicional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. MALISKA, C.R., A solution method for three-dimensional parabolic fluid flow problems in nonorthogonal coordinates. Ph.D. thesis, Waterloo Univ., Ontario, Canada, 1981.
2. WINSLOW, A.M., Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh. J. Comp. Phys., v. 2, p.149-172, 1967.
3. CHU, W.H., Development of a general finite difference approximation for a general domain. Part I: Machine transformation, J. Comp. Phys., v.8, p.392-408, 1971.
4. THOMPSON, J.F., THAMES, F.C. & MASTIN, C.W., Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. J. Comp. Phys., v.15, p.299-319, 1974.
5. THOMPSON, J.F., THAMES, F.C. & MASTIN, C.W., Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. NASA Langley Research Center Cr-2729, 1976.
6. TAYLOR, A.E. & MANN, W.R., Advanced Calculus. John Wiley & Sons Inc., 1972.
7. VINOKUR, M., Conservation equations of gasdynamics in curvilinear coordinate systems. J. Comp. Phys., v.14, p.105-125, 1974.
8. ROACHE, P.J., Computational fluid dynamics. Hermosa Publishers, 1976.
9. RAITHBY, G.D. & TORRANCE, K.E., Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow. Computer and fluids, v.2, p.191-206, 1974.

10. RAITHBY, G.D., Prediction of dispersion by surface discharge. Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada, August 1976.
11. RAITHBY, G.D. & SCHNEIDER, G.E., Numerical solution of problems in incompressible fluid flow: treatment of the velocity-pressure coupling. Numerical Heat Transfer, v.2, p.417-440, 1979.
12. VAN DOORMAAL, J.P. & RAITHBY, G.D., The application of quasi continuum approach to three-dimensional elliptic flows in complex geometries. Waterloo Research Institute Report to Atomic Energy of Canada Ltd., September 1981.
13. NAPOLITANO, M. & QUARTAPELLE, L., Block-ADI methods for steady natural convection in two dimensions. In: Numerical methods in laminar and turbulent flow. Taylor, C. & Schrefler, B.A., Pineridge Press Ltd., p.477-487, 1981.
14. CHANG, K.S., WHON, Y.H. & CHO, C.H., Patterns of natural convection around a square cylinder placed concentrically in a horizontal circular cylinder. ASME J. Heat Transfer, v. 105, p.273-280, 1983.
15. ROBILLARD, L., VASSEUR, P. & HUNG, N.T., Thermoconvective heat transfer in a rectangular cavity with constant wall cooling rate. In: Numerical methods in laminar and turbulent flow. Taylor, C. & Schrefler, B.A., Pineridge Press Ltd., p.1059-1068, 1981.
16. DE VAHL DAVIS, G., Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity. Int. J. Heat Mass Transfer, v.11, p. 1675-1693, 1968.
17. DE VAHL DAVIS, G., Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. Int. J. Numerical Methods in Fluids, v.3, p.249-264, 1983.

18. DE VAHL DAVIS, G. & JONES, I.P., Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. Int. J. Numerical Methods in Fluids, v.3, p.227-248, 1983.
19. PATEL, N.R. & BRIGGS, D.G., A MAC scheme in boundary-fitted curvilinear coordinates. Numerical Heat Transfer, v.6, p.383-394, 1983.
20. PATANKAR, S.V., Numerical heat transfer and fluid flow. McGraw-Hill Book Company, U.S.A., 1980.
21. BIRD, R.B., STEWART, W.E. & LIGHTFOOT, E.N., Transport Phenomena. John Wiley & Sons Inc., 1960.
22. LANDAU, L. & LIFCHITZ, E., Mécanique des fluides. Editions MIR, Moscou, 1971.
23. SPIEGEL, E.A. & VERONIS, G., On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. Astrophys. J., v.131, p.442-447, 1960. [Erratum: VERONIS, G. The magnitude of the dissipation terms in the Boussinesq approximation. Astrophys. J., v.135, p.655-656, 1962.]
24. MIHALJAN, J.M., A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid. Astrophys. J., v.136, p.1126-1133, 1962.
25. GRAY, D.D. & GIORGINI, A., The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. Int. J. Heat Mass Transfer, v.19, p.545-551, 1976.
26. SPALDING, D.B., A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. Int. J. Numerical Methods in Engineering, v.4, p.551-559, 1972.
27. FELL, C.F., Curvilinear coordinate systems described by the system metric. Electrical Engineering Report EE74-1 Waterloo Univ., Canada, 1974.

APÊNDICE A

COVARIÂNCIA E CONTRAVARIÂNCIA. MÉTRICAS DA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS.

A.1 - INTRODUÇÃO

Nesse apêndice faz-se uma rápida exposição em notação tensorial relacionada aos conceitos clássicos de componentes covariantes e contravariantes de um vetor. A transformação de bases vetoriais sobre as quais essas componentes são definidas num dado sistema de coordenadas é também considerada. Enfatiza-se que esse processo de transformação é semelhante ao procedimento para transformação de sistemas de coordenadas, pois ambos os casos tratam de transformação sobre bases vetoriais.

Obtêm-se as métricas da transformação do sistema cartesiano de coordenadas para o sistema generalizado no caso bidimensional. Define-se as componentes contravariantes sem normalização métrica do vetor velocidade, cuja utilização neste trabalho é fundamental. Por fim, obtêm-se expressões para o cálculo de comprimentos e áreas no domínio físico.

A.2 - COMPONENTES COVARIANTES E CONTRAVARIANTES DE UM VETOR

Dada uma base vetorial qualquer do espaço Euclidiano $\{\vec{e}_i\}$: Chama-se componentes contravariantes de um vetor \vec{V} , com respeito a essa base, aos números V^i tais que

$$\vec{V} = V^i \vec{e}_i . \quad (A.1)$$

Denomina-se componentes covariantes do vetor \vec{V} , com respeito àquela base, aos números V_i definidos pelos produtos escalares

$$V_i = \vec{V} \cdot \vec{e}_i . \quad (A.2)$$

As componentes contravariantes são representadas por meio de superíndices, enquanto as covariantes são identificadas por subíndices.

A partir das componentes contravariantes do vetor \vec{V} pode-se determinar facilmente suas componentes covariantes. Nesse intuito, reescreva-se a Equação (A.1) como

$$\vec{V} = V^j \vec{e}_j .$$

Executando o produto escalar definido na Equação (A.2), vem que

$$V_i = V^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) ,$$

ou

$$V_i = (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) V^j .$$

Introduzindo o tensor $e_{ij} = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$, obtém-se

$$V_i = e_{ij} V^j , \tag{A.3}$$

que é a relação procurada.

Por outro lado, o vetor \vec{V} expresso em termos de suas componentes covariantes assume a forma

$$\vec{V} = V_i \vec{e}^i , \tag{A.4}$$

onde $\{\vec{e}^i\}$ é uma base vetorial do espaço Euclidiano. Substituindo a Equação (A.3) na Equação (A.4), e comparando o resultado com a Equação (A.1), demonstra-se que

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} , \tag{A.5}$$

e

$$\vec{e}_i = e_{ij} \vec{e}^j . \tag{A.6}$$

O produto interno definido na Equação (A.5) é conhecido como delta de Kronecker, e é representado por δ_j^i . Note-se que quando $i \neq j$, δ_j^i é igual a zero, e os vetores das duas bases são mutuamente ortogonais. Da mesma forma que as componentes do vetor \vec{V} , $\{\vec{e}_i\}$ e $\{\vec{e}^i\}$ são denominadas respectivamente bases vetoriais covariante e contravariante. E, da mesma forma que as componentes de \vec{V} , as bases estão relacionadas através do tensor métrico e_{ij} , como mostrado na Equação (A.6).

A Figura A.1 está construída considerando-se a base vetorial

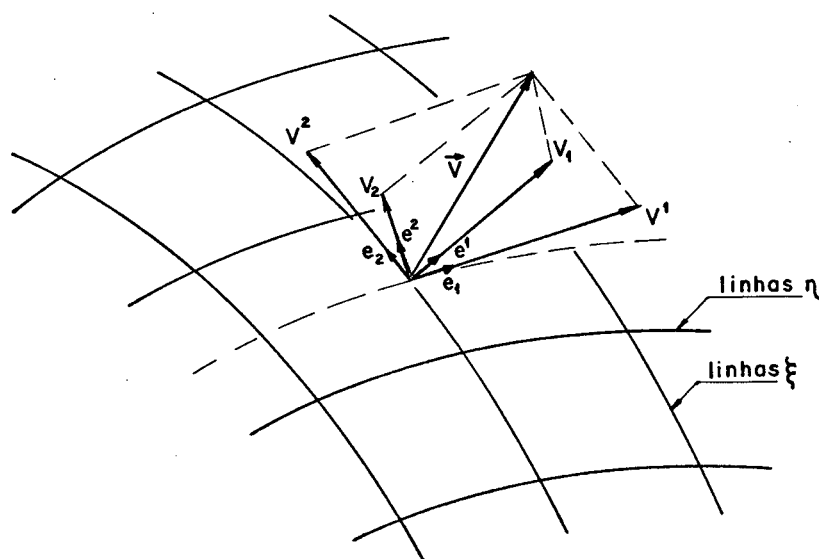


Figura A.1 - Entidades covariantes e contravariantes associadas ao vetor \vec{V} e ao sistema generalizado de coordenadas (ξ, η) .

$\{\vec{e}_i\}$ e o vetor \vec{V} associados a um dado ponto do sistema curvilíneo generalizado de coordenadas (ξ, η) . Sobre esse ponto estão representadas as entidades covariantes (V_i, \vec{e}_i) e contravariantes (V^i, \vec{e}^i) associadas ao sistema generalizado.

É interessante ressaltar que as componentes covariantes e contravariantes de um vetor são definidas em relação a um único sistema de coordenadas. No caso do sistema generalizado (ξ, η) essas componentes são distintas, como poder ser visto na Figura A.1. No caso do sistema cartesiano, no entanto, as componentes covariantes

e contravariantes coincidem, pois o sistema é ortogonal.

A.3 - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA CARTESIANO PARA O SISTEMA GENERALIZADO DE COORDENADAS

Evidencia-se o fato de que, da mesma maneira que as componentes covariantes e contravariantes de um vetor podem ser correlacionadas num dado sistema de coordenadas, elas podem também ser relacionadas a outras componentes desse vetor definidas num outro sistema de coordenadas. De fato, para que isso seja feito é necessário apenas que sejam conhecidas as bases vetoriais associadas a cada um dos sistemas. Uma vez estabelecidas aquelas relações, ter-se-á executado uma transformação de sistemas de coordenadas.

Considere-se a base vetorial $\{\vec{u}_i\}$ associada ao sistema cartesiano. As componentes covariantes do vetor \vec{V} sobre esse sistema são

$$U_i = \vec{V} \cdot \vec{u}_i . \quad (A.7)$$

A associação entre as componentes contravariantes de V definidas no sistema generalizado (ξ, η) e suas componentes cartesianas é pois, uma transformação sobre as bases vetoriais $\{\vec{e}_i\}$ e $\{\vec{u}_j\}$. Nesse caso, é fácil mostrar que

$$U_i = g_{ij} V^j , \quad (A.8)$$

onde

$$g_{ij} = \vec{e}_j \cdot \vec{u}_i . \quad (A.9)$$

O tensor métrico g_{ij} é a matriz que define a transformação de sistemas coordenados (ou seja, a transformação sobre bases vetoriais associadas a esses sistemas).

A.4 - DETERMINAÇÃO DO TENSOR MÉTRICO g_{ij}

É sabido que distâncias independem do sistema de coordenadas considerado. Por isso são ditas invariantes. A distância infinite-

simal $(ds)^2$, em termos das direções contravariantes (direções das componentes contravariantes de um vetor) do sistema generalizado de coordenadas, é dado por

$$(ds)^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j, \quad (A.10)$$

onde $d\theta^i$ são distâncias infinitesimais ao longo das direções coordenadas ξ e η . No sistema cartesiano tem-se que

$$(ds)^2 = dx^i dx^i, \quad (A.11)$$

onde dx^i são distâncias infinitesimais ao longo das direções x e y .

Considere-se um vetor genérico \vec{X} , cujas componentes cartesianas são definidas como

$$x^k = x^k(\theta^1, \theta^2), \quad (A.12)$$

onde θ^1 e θ^2 são suas componentes contravariantes no sistema generalizado (ao longo de ξ e η). A derivada total desse vetor é

$$dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (A.13)$$

Aplicando a relação invariante, Equação (A.11), vem que

$$(ds)^2 = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^k}{\partial \theta^j} d\theta^i d\theta^j. \quad (A.14)$$

Comparando essa equação à Equação (A.10), obtém-se

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^k}{\partial \theta^j}. \quad (A.15)$$

Portanto, o tensor métrico é dado por

$$\begin{aligned}
g_{11} &= (x_\eta)^2 + (y_\eta)^2 = \alpha \\
g_{12} &= g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = \beta \\
g_{22} &= (x_\xi)^2 + (y_\xi)^2 = \gamma ,
\end{aligned}
\tag{A.16}$$

onde α , β e γ são as constantes já mencionadas no Capítulo 2.

A.5 - VELOCIDADES CONTRAVARIANTES SEM NORMALIZAÇÃO MÉTRICA

Na Figura A.2 estão representadas as componentes do vetor velocidade \vec{V} , U e V , normais às linhas de ξ e η constantes respectivamente. São portanto, as velocidades responsáveis pelo fluxo de massa através dessas linhas. Note-se que tais componentes podem ser obtidas a partir das componentes contravariantes como

$$U = V^1 \cos \psi_1 \tag{A.17}$$

$$V = V^2 \cos \psi_2 . \tag{A.18}$$

Das Equações (A.17) e (A.18), vê-se que U e V são as próprias componentes contravariantes a menos de um fator multiplicativo inerente ao sistema de coordenadas (ξ, η) . São assim denominadas componentes contravariantes sem normalização métrica do vetor velocidade.

Com auxílio das Equações A(8) e A(16), e com alguma manipulação algébrica, demonstra-se que

$$U = y_\eta u - x_\eta v \tag{A.19}$$

$$V = x_\xi v - y_\xi u , \tag{A.20}$$

onde u e v são as componentes cartesianas do vetor velocidade mostradas na Figura A.2.

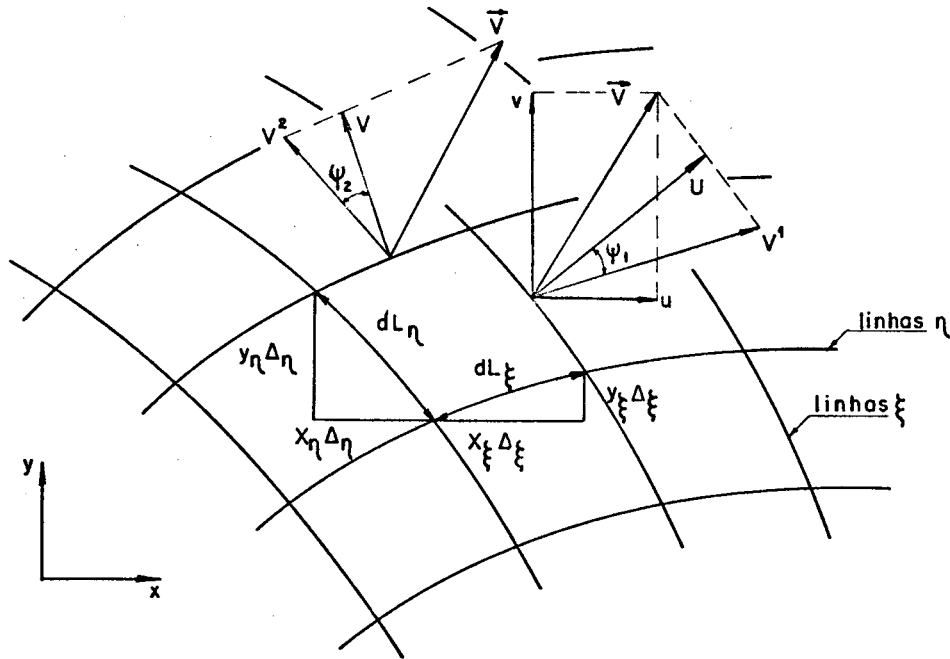


Figura A.2 - Componentes contravariantes de \vec{V} sem normalização métrica, U e V ; e comprimentos no domínio físico.

A.6 - COMPRIMENTOS E ÁREAS NO PLANO TRANSFORMADO

As expressões para calcular comprimentos e áreas do domínio físico são aqui obtidas em função das métricas da transformação. Aplicando o teorema de Pythagoras para os comprimentos definidos na Figura A.2, obtém-se

$$|d\vec{L}_\xi| = \Delta\xi \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} = \sqrt{\gamma} \Delta\xi \quad (\text{A.21})$$

$$|d\vec{L}_\eta| = \Delta\eta \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} = \sqrt{\alpha} \Delta\eta \quad (\text{A.22})$$

Genericamente, um elemento de área no plano físico é dado por

$$d\vec{S} = d\vec{L}_\xi \times d\vec{L}_\eta \quad (\text{A.23})$$

No sistema cartesiano os dois vetores, $d\vec{L}_\xi$ e $d\vec{L}_\eta$, são repre-

sentados por

$$d\vec{L}_\xi = x_\xi \Delta\xi \vec{u}_1 + y_\xi \Delta\xi \vec{u}_2 \quad (\text{A.24})$$

$$d\vec{L}_\eta = x_\eta \Delta\eta \vec{u}_1 + y_\eta \Delta\eta \vec{u}_2 \quad (\text{A.25})$$

O produto vetorial resulta

$$d\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_\xi \Delta\xi & y_\xi \Delta\xi & 0 \\ x_\eta \Delta\eta & y_\eta \Delta\eta & 0 \end{vmatrix} = \vec{u}_3 (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta, \quad (\text{A.26})$$

e a área elementar é o módulo do vetor $d\vec{S}$, ou seja

$$|d\vec{S}| = dS = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta = \frac{\Delta\xi \Delta\eta}{J}. \quad (\text{A.27})$$

Observa-se que a área no plano físico relaciona-se a área no plano transformado através do inverso do Jacobiano da transformação. Convém enfatizar que a magnitude da área no domínio transformado é de livre escolha.

A.7 - SUMÁRIO

Esse Apêndice visou o melhor esclarecimento de alguns fundamentos importantes considerados no desenvolvimento desta tese. Tais foram: a introdução dos conceitos de covariância e contravariância associados a vetores e sistemas de coordenadas; o processo de transformação de sistemas de coordenadas com a obtenção do tensor métrico para conversão do sistema cartesiano para o generalizado; e a definição das componentes contravariantes sem normalização métrica do vetor velocidade. Por último obteve-se expressões para o cálculo de comprimentos e áreas elementares no domínio físico. Tais relações são utilizadas na determinação da temperatura média na cavidade, e no cálculo do seu diâmetro hidráulico (Ver Capítulo 7, Seções 7.4 e 7.5). Uma abordagem mais extensa acerca dos tópicos deste Apêndice pode ser encontrada em Fell [27].

APÊNDICE B

EQUAÇÕES DE GERAÇÃO DE MALHAS NO PLANO TRANSFORMADO

B.1 - INTRODUÇÃO

Nesse apêndice são obtidas as Equações (2.12) e (2.13) de geração de malhas a partir das Equações (2.9) e (2.10), sendo posteriormente aproximadas em diferenças finitas. Inicialmente desenvolve-se expressões para as derivadas de primeira e segunda ordens da função $f(\xi, \eta)$ em relação a x e y , as quais são necessárias à obtenção das derivadas de x e y com relação a ξ e η no plano transformado. Finalmente, as equações transformadas resultantes são discretizadas sobre o domínio transformado.

Este apêndice, apesar de poder ser encontrado na íntegra em [1], é aqui transcrito para tornar completo o conteúdo relativo ao item geração de malhas.

B.2 - DERIVADAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS DA FUNÇÃO $f(\xi, \eta)$ EM RELAÇÃO A x E y

Considere-se a função $f = f(\xi, \eta)$, com $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$. Aplicando-se a regra da cadeia de derivação obtêm-se

$$f_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \quad (B.1)$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \quad (B.2)$$

As derivadas de segunda ordem são encontradas através de nova aplicação da regra da cadeia. Diferenciando a Equação (B.1) em relação a x obtêm-se

$$f_{xx} = \xi_{xx} f_\xi + \eta_{xx} f_\eta + (f_\xi)_x \xi_x + (f_\eta)_x \eta_x, \quad (B.3)$$

onde

$$(f_\xi)_x = f_{\xi\xi} \xi_x + f_{\xi\eta} \eta_x \quad (B.4)$$

$$(f_{\eta})_x = f_{\xi\eta}\xi_x + f_{\eta\eta}\eta_x \quad (B.5)$$

Inserindo as Equações (B.4) e (B.5) na Equação (B.3) vem que

$$f_{xx} = \xi_{xx}f_{\xi} + \eta_{xx}f_{\eta} + \xi_x^2 f_{\xi\xi} + \xi_x\eta_x f_{\xi\eta} + \xi_x\eta_x f_{\xi\eta} + \eta_x^2 f_{\eta\eta} \quad (B.6)$$

De maneira idêntica, a segunda derivada da função f em relação a y é obtida pela diferenciação da Equação (B.2), resultando

$$f_{yy} = \xi_{yy}f_{\xi} + \eta_{yy}f_{\eta} + \xi_y^2 f_{\xi\xi} + \xi_y\eta_y f_{\xi\eta} + \xi_y\eta_y f_{\xi\eta} + \eta_y^2 f_{\eta\eta} \quad (B.7)$$

B.3 - DERIVADAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS DE ξ E η EM RELAÇÃO A x E y .

Para a obtenção das equações de geração de malhas escritas no plano transformado, torna-se necessário a determinação das expressões das derivadas das variáveis independentes ξ e η em relação às coordenadas físicas x e y . As derivadas aqui apresentadas estão relacionadas às transformações definidas nas Equações (2.1) e (2.2).

DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM

Para obter estas derivadas, monta-se um sistema de duas equações, fazendo f igual a x e y respectivamente na Equação (B.1). As duas incógnitas ξ_x e η_x são as derivadas procuradas. Da solução desse sistema resulta

$$\xi_x = \eta_y J \quad (B.8)$$

$$\eta_x = -\xi_y J \quad (B.9)$$

Do mesmo modo, fazendo f igual a x e y na Equação (B.2), obtém-se um sistema similar ao anterior. Seus parâmetros desconhecidos são ξ_y e η_y . Resolvendo esse sistema, obtém-se

$$\xi_y = -x_{\eta} J \quad (B.10)$$

$$\eta_y = x_\xi J \quad (B.11)$$

DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM

Fazendo f igual a x e y na Equação (B.6), obtêm-se um sistema de equações cujas incógnitas são ξ_{xx} e η_{xx} . Sua solução é

$$\xi_{xx} = -(E_1 \xi_x + F_1 \xi_y) \quad (B.12)$$

$$\eta_{xx} = -(E_1 \eta_x + F_1 \eta_y) \quad (B.13)$$

onde

$$E_1 = x_{\xi\xi} \xi_x^2 + x_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2x_{\xi\eta} \eta_x \xi_x$$

$$F_1 = y_{\xi\xi} \xi_x^2 + y_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2y_{\xi\eta} \eta_x \xi_x$$

Identicamente, fazendo f igual a x e y na Equação (B.7), obtêm-se um sistema de equações cujas incógnitas são ξ_{yy} e η_{yy} . Resolvendo esse sistema, obtêm-se

$$\xi_{yy} = -(E_2 \xi_x + F_2 \xi_y) \quad (B.14)$$

$$\eta_{yy} = -(E_2 \eta_x + F_2 \eta_y) \quad (B.15)$$

onde

$$E_2 = x_{\xi\xi} \xi_y^2 + x_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2x_{\xi\eta} \eta_y \xi_y$$

$$F_2 = y_{\xi\xi} \xi_y^2 + y_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2y_{\xi\eta} \eta_y \xi_y$$

B.4 - EQUAÇÕES DE GERAÇÃO DE MALHAS NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

O sistema elíptico de geração escrito no plano físico, e a ser transformado para o domínio de cálculos, é dado pelas Equações (2.9) e (2.10), as quais são aqui transcritas

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (2.9)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) . \quad (2.10)$$

Inserindo as Equações (B.12) e (B.14) na Equação (2.9) e as Equações (B.13) e (B.15) na Equação (2.10), resulta

$$-(E_1 + E_2)\xi_x - (F_1 + F_2)\xi_y = P(\xi, \eta) \quad (B.16)$$

$$-(E_1 + E_2)\eta_x - (F_1 + F_2)\eta_y = Q(\xi, \eta) . \quad (B.17)$$

Nessas equações, as quantidades $(E_1 + E_2)$ e $(F_1 + F_2)$ são as expressões para x e y no plano transformado, ou seja, são as equações transformadas procuradas. Definindo

$$E = E_1 + E_2$$

$$F = F_1 + F_2 ,$$

as Equações (B.16) e (B.17) reduzem-se a

$$E\xi_x + F\xi_y = -P(\xi, \eta) \quad (B.18)$$

$$E\eta_x + F\eta_y = -Q(\xi, \eta) . \quad (B.19)$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtêm-se

$$E = (-P\eta_y + Q\xi_y)/J \quad (B.20)$$

$$F = (P\eta_x - Q\xi_x)/J , \quad (B.21)$$

ou

$$\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2}(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \quad (B.22)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2}(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 . \quad (B.23)$$

As Equações (B.22) e (B.23) constituem o sistema de geração de malhas escrito para as coordenadas físicas no plano transformado. Os coeficientes α, β e γ são dados no Apêndice A.

B.5 - EQUAÇÕES TRANSFORMADAS EM DIFERENÇAS FINITAS

As equações em diferenças finitas são obtidas para uma variável genérica ϕ , a qual representa as variáveis x e y . Assim, reescreve-se as Equações (B.22) e (B.23) em forma unificada, como

$$\alpha\phi_{\xi\xi} + \gamma\phi_{\eta\eta} - 2\beta\phi_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2}(P\phi_{\xi} + Q\phi_{\eta}) = 0 \quad . \quad (\text{B.24})$$

A Figura B.1 mostra um exemplo de domínio transformado. Se a região física arbitrária for simplesmente conexa, as informações geométricas que constituem as condições de contorno para as equações de geração estão contidas nos quatro lados do domínio transformado. Na figura, os pontos assinalados com símbolos circulares são os pontos onde os valores de x e y são conhecidos. Se a região física for duplamente conexa, há a necessidade de especificação de condições de contorno apenas nas fronteiras de topo e de base.

As aproximações, feitas em diferenças centrais, resultam

$$\phi_{\xi\xi} \approx \frac{\phi_E + \phi_W - 2\phi_P}{\Delta\xi^2} \quad (\text{B.25})$$

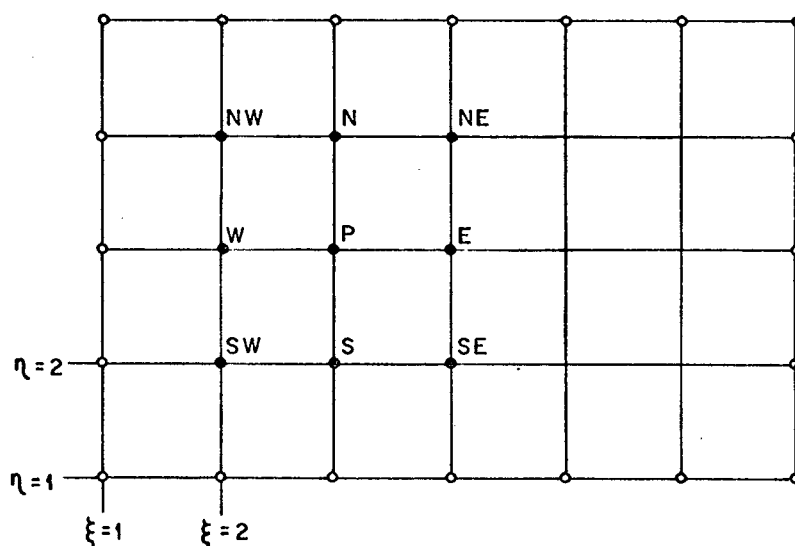


Figura B.1 - Domínio transformado.

$$\phi_{\eta\eta} \approx \frac{\phi_N + \phi_S - 2\phi_P}{\Delta\eta^2} \quad (\text{B.26})$$

$$\phi_{\xi\eta} \approx \frac{0,25 (\phi_{NE} + \phi_{SW} - \phi_{SE} - \phi_{NW})}{\Delta\xi\Delta\eta} \quad (\text{B.27})$$

$$\phi_{\xi} \approx \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta\xi} \quad (\text{B.28})$$

$$\phi_{\eta} \approx \frac{\phi_N - \phi_S}{2\Delta\eta} \quad (\text{B.29})$$

Inserindo as Equações (B.25) a (B.29) na Equação (B.24), obtém-se

$$\begin{aligned} A_P\phi_P = & A_e\phi_E + A_w\phi_W + A_n\phi_N + A_s\phi_S + \\ & A_{ne}\phi_{NE} + A_{nw}\phi_{NW} + A_{se}\phi_{SE} + A_{sw}\phi_{SW} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

onde

$$A_P = 2\alpha + 2\gamma \quad (\text{B.31})$$

$$A_e = \alpha + \frac{P}{2J^2} \quad (\text{B.32})$$

$$A_w = \alpha - \frac{P}{2J^2} \quad (\text{B.33})$$

$$A_n = \gamma + \frac{Q}{2J^2} \quad (\text{B.34})$$

$$A_s = \gamma - \frac{Q}{2J^2} \quad (\text{B.35})$$

$$A_{ne} = A_{sw} = -\frac{\beta}{2} \quad (\text{B.36})$$

$$A_{nw} = A_{se} = \frac{\beta}{2} \quad (\text{B.37})$$

No sistema formado pelas Equações (B.22) e (B.23), as quantidades α , β e γ são coeficientes de acoplamento. Estes envolvem derivadas de x e y no plano transformado (o que torna as equações não lineares) e são avaliados usando os valores de x e y do nível iterativo anterior. A solução do sistema de equações é facilmente

obtida por métodos "ponto por ponto" ou "linha por linha", e fornece os valores de x e y que identificam as linhas de ξ e η constantes no plano físico.

B.6 - SUMÁRIO

Nesse apêndice apresentou-se o processo de transformação do sistema de equações de geração de malhas do plano físico para o transformado. Em etapa posterior, essas equações foram discretizadas em aproximação por diferenças finitas centrais.

APÊNDICE C

O FENÔMENO DA CONVECÇÃO NATURAL

C.1 - INTRODUÇÃO

Nesse apêndice faz-se uma abordagem em termos termodinâmicos, estabelecendo-se o critério para a ocorrência de convecção natural. Em seguida, mostra-se duas outras maneiras de se obter o termo forças de flutuação, diferentes daquela utilizada no Capítulo 3. As Seções C.2 e C.3 desse apêndice são baseadas em observações de Landau [22]. Por fim, na Seção C.4 o termo forças de flutuação é obtido expandindo-se a massa específica em série de Taylor.

C.2 - CONDIÇÃO DE OCORRÊNCIA DE CONVECÇÃO NATURAL

Um fluido sujeito à ação gravitacional, e sobre o qual não há a ação diferenciada de quaisquer outros esforços externos, está em equilíbrio mecânico (ausência de movimentos macroscópicos) se estiver em equilíbrio térmico. Se isso ocorre, a condição de equilíbrio mecânico do fluido é expressa pela equação

$$\nabla P = \rho g \quad . \quad (C.1)$$

Se houver uma perturbação térmica no meio fluido, o equilíbrio torna-se instável, e haverá então uma movimentação macroscópica deste fazendo com que surjam correntes, criando a tendência do estabelecimento de uma nova temperatura de equilíbrio. Esse movimento é conhecido como convecção natural. Em outras palavras, a condição de equilíbrio mecânico é a ausência de convecção natural.

Considere-se um elemento de fluido situado a uma altura y em relação a um referencial gravitacional, e cujo volume específico é $v(P,s)$, onde P e s são pressão e entropia de equilíbrio do fluido em y . Suponha-se que esse elemento de fluido sofra uma pequena translação em condições adiabáticas, aumentando sua altura de δy . Seu volume específico passa então a ser $v(P',s)$, sendo P' a nova

pressão correspondente à altura $y+\epsilon$. Para que se mantenha equilíbrio estável é necessário que surja uma força de reação que demova o elemento para sua posição inicial. Por outro lado, o volume específico correspondente à altura $y+\epsilon$ é $v(P;s')$, sendo s' a entropia correspondente a essa altura. Desta forma, a condição de equilíbrio estável é

$$v(P;s') - v(P;s) > 0 \quad , \quad (C.2)$$

ou ainda

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_P (s' - s) > 0 \quad . \quad (C.3)$$

Para deslocamentos pequenos, pode-se escrever

$$\frac{ds}{dy} = \frac{s' - s}{\epsilon} \quad ,$$

ou

$$s' - s = \frac{ds}{dy} \epsilon \quad . \quad (C.4)$$

Assim, substituindo a Equação (C.4) na Equação (C.3), resulta

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_P \frac{ds}{dy} > 0 \quad . \quad (C.5)$$

Da termodinâmica sabe-se que

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_P = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad , \quad (C.6)$$

onde c_p é o calor específico à pressão constante, e T é a temperatura. Como T e c_p são quantidades positivas, pode-se reescrever a Equação (C.6) como

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \frac{ds}{dy} > 0 \quad . \quad (C.7)$$

Salvo raras exceções, as substâncias em geral dilatam-se ao serem aquecidas, de modo que $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P > 0$. Então, a condição de ausên-

cia de convecção natural (manutenção do equilíbrio estável) reduz-se a desigualdade

$$\frac{ds}{dy} > 0, \quad (C.8)$$

ou seja, a entropia aumentando com a altura. É bastante fácil exprimir essa condição em termos do gradiente térmico $\frac{dT}{dy}$. Sabe-se que

$$\frac{ds}{dy} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{dy} + \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dy} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dy} - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \frac{dP}{dy} > 0, \quad (C.9)$$

porém $\frac{dP}{dy} = -\frac{g}{v}$, então

$$\frac{dT}{dy} > \frac{gT}{c_p v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P. \quad (C.10)$$

Ocorrerá então convecção natural com a temperatura decrescendo com o aumento de y , se seu gradiente for superior em valor absoluto a $\frac{gT}{c_p v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$. Caso contrário a condição estabelecida na Equação (C.10) é satisfeita e haverá equilíbrio mecânico estável.

C.3 - EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO PARA A CONVECÇÃO NATURAL

Considere-se um fluido sob a ação do campo gravitacional. Se a distribuição de temperaturas ao longo desse fluido não satisfaz a condição de equilíbrio mecânico estável (Equação C.10), sendo ainda função de mais de uma direção coordenada, o equilíbrio mecânico torna-se impossível. Esse desequilíbrio faz surgir correntes internas em meio ao fluido, as quais promovem uma mistura que tende a estabelecer temperaturas de equilíbrio. Tal movimento, como já mencionado, é denominado convecção natural.

Considerando-se a hipótese de escoamentos incompressíveis, tem-se que flutuações de pressão no meio fluido implicam em variações correspondentes muito pequenas para a massa específica. Por exemplo, na atmosfera, onde a pressão varia com a altura, desconsidera-se colunas de fluido muito altas, fazendo com que a variação da massa específica com a altura seja desprezável. Com isso, as varia

ções de massa específica são devidas unicamente ao fato de o fluido estar irregularmente aquecido.

Considere-se a temperatura $T = \bar{T} + T'$, onde \bar{T} é uma constante (referência) e T' uma flutuação que define o perfil de temperaturas do fluido. Suponha-se T' pequeno diante de \bar{T} . Da mesma forma procede-se em relação à massa específica do fluido, dada por $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, com $\bar{\rho}$ constante. Como a variação de temperatura T' é pequena, a variação de massa específica ρ' por ela provocada também o é. Então, pode-se escrever

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P T' = -\bar{\rho} \bar{\beta} T' , \quad (C.11)$$

onde $\bar{\beta} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$ é o coeficiente de expansão térmica do fluido. Considere-se ainda a pressão $P = \bar{P} + P'$, onde \bar{P} é a pressão de equilíbrio mecânico correspondente à temperatura e densidade constantes \bar{T} e $\bar{\rho}$, e a uma dada altura em relação ao referencial gravitacional. A flutuação P' corresponde às flutuações T' e ρ' . A pressão \bar{P} é dada pela equação da hidrostática

$$\bar{P} = \bar{\rho} \vec{g} y + \text{constante} . \quad (C.12)$$

A equação de Navier-Stokes em notação vetorial, considerando a ação do campo gravitacional, assume a forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\vec{V} \cdot \nabla) = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \vec{V} + \vec{g} , \quad (C.13)$$

onde \vec{g} representa a força peso por unidade de massa. Substituindo $P = \bar{P} + P'$ e $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ no termo de pressão, após alguma manipulação obtém-se

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\nabla \bar{P}}{\bar{\rho}} + \frac{\nabla P'}{\bar{\rho}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho} \bar{\rho}} \nabla P' - \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2 - \bar{\rho} \rho'} \nabla \bar{P} . \quad (C.14)$$

Os termos grifados na Equação (C.14) são de ordem de grandeza inferior, e são desprezados. Resulta então

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\nabla \bar{P}}{\bar{\rho}} + \frac{\nabla P'}{\bar{\rho}} - \frac{\nabla \bar{P}}{\bar{\rho}^2} \rho' \quad . \quad (C.15)$$

Substituindo as Equações (C.11) e (C.12) na Equação (C.15) resulta

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \vec{g} + \frac{\nabla P'}{\bar{\rho}} - \vec{g} T' \beta \quad . \quad (C.16)$$

Substituindo essa expressão na equação de Navier-stokes, e omitindo a barra "-" de $\bar{\rho}$ obtém-se

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\vec{V} \cdot \nabla) = -\frac{\nabla P'}{\rho} + \gamma \Delta \vec{V} - \vec{g} \beta T' \quad ,$$

ou

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \nabla) = -\nabla P' + \mu \Delta \vec{V} - \rho \vec{g} \beta T' \quad . \quad (C.17)$$

O termo forças de flutuação é então dado por

$$F_y = -\rho \vec{g} \beta T' \quad ,$$

ou

$$F_y = \rho g \beta (T - \bar{T}) \quad , \quad (C.18)$$

que é a expressão já obtida no Capítulo 3.

Note-se que as hipóteses aqui assumidas são as mesmas consideradas no Capítulo 3, daí o mesmo resultado para a força de flutuação.

Completam o sistema de equações de conservação a equação da continuidade em sua forma incompressível e a equação de energia, que não têm suas estruturas alteradas pela introdução das flutuações em P , ρ e T (ver Capítulo 3).

C.4 - OBTENÇÃO DA FORÇA DE FLUTUAÇÃO USANDO SÉRIE DE TAYLOR

Considere-se a Equação (C.13) de Navier-Stokes escrita da forma seguinte

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \nabla) = - \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} \quad . \quad (C.19)$$

Expandindo em série de Taylor em T sobre a temperatura de referência \bar{T} , resulta

$$\rho = \bar{\rho} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\bar{T}} (T - \bar{T}) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_{\bar{T}} (T - \bar{T})^2 + \dots \quad (C.20)$$

Desprezando os termos de ordem de grandeza inferiores à flutuação $(T - \bar{T})$, vem que

$$\rho = \bar{\rho} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\bar{T}} (T - \bar{T}) \quad . \quad (C.21)$$

Introduzindo o coeficiente de expansão térmica $\bar{\beta}$, obtém-se

$$\rho = \bar{\rho} - \bar{\rho} \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad . \quad (C.22)$$

Considerando-se a flutuação na pressão, obtém-se ainda que

$$\nabla P = \nabla \bar{P} + \nabla P' = \bar{\rho} \vec{g} + \nabla P' \quad . \quad (C.23)$$

Substituindo as Equações (C.22) e (C.23) na Equação (C.19), e considerando a massa específica variável apenas no termo forças de corpo, vem que

$$\bar{\rho} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{\rho} \vec{V}(\vec{V} \cdot \nabla) = - \nabla P' + \nu \Delta \vec{V} - \bar{\rho} \vec{g} \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad . \quad (C.24)$$

O termo forças de flutuação, retirada a barra "-" de $\bar{\rho}$ por conveniência, é então dado por

$$F_y = \rho g \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad . \quad (C.25)$$

C.5 - CONCLUSÕES E SUMÁRIO

Nesse apêndice salientou-se a interpretação física do fenômeno da convecção natural, estabelecendo-se a expressão própria para avaliar o termo forças de flutuação que é dominante nesse tipo de

problema. Essa expressão foi obtida de duas formas distintas. Na primeira, o termo foi obtido inserindo as flutuações de massa específica, pressão e temperatura na equação de Navier-Stokes. Eliminando termos de ordem de grandeza inferiores, obteve-se a expressão procurada. Na segunda maneira, simplesmente inseriu-se na equação de Navier-Stokes a massa específica expandida em série de Taylor e a flutuação de pressão, obtendo-se diretamente o termo forças de flutuação. Evidentemente, as hipóteses assumidas nestes desenvolvimentos foram as mesmas consideradas na formulação apresentada no Capítulo 3. Em consequência os resultados obtidos foram os mesmos.

APÊNDICE D

COEFICIENTES PARA A EQUAÇÃO DE PRESSÃO PARA VOLUMES DE CONTROLE DE CONTINUIDADE NA FRONTEIRA

D.1 - INTRODUÇÃO

Esse apêndice ocupa-se da obtenção dos coeficientes para a equação de pressão para volumes de controle de continuidade situados nas fronteiras. Nesse processo, as condições de contorno para pressão ficam automaticamente incorporadas dentro dos coeficientes. Isso faz com que as expressões para os coeficientes relativos aos elementos de fronteira sejam diferentes daquelas para os elementos internos. As condições de contorno usadas na aplicação da equação de conservação de massa foram de velocidades (fluxos de massa) prescritas nas paredes.

São apresentadas aqui somente as expressões dos coeficientes que ficam alterados quando deslocados do interior do domínio para as fronteiras. Os coeficientes que desaparecem e os que permanecem inalterados são apenas indicados. O termo fonte, que agora envolve o gradiente de pressão na parede, é também listado. A Figura D.1 mostra os 9 tipos de volume de controle envolvidos. Para o elemento interno, denotado por "I", as expressões estão listadas no Capítulo 6.

É conveniente lembrar que a expressão para obtenção de Λ_p para qualquer elemento do domínio, é

$$\Lambda_p = \Lambda_e + \Lambda_n + \Lambda_s + \Lambda_w + \Lambda_{ne} + \Lambda_{nw} + \Lambda_{se} + \Lambda_{sw} \quad (D.1)$$

D.2 - LISTAGEM DOS COEFICIENTES E TERMOS FONTE

A - ELEMENTO L

$$\Lambda_w = \Lambda_{nw} = \Lambda_{sw} = 0$$

$$\Lambda_e, \Lambda_{ne}, \Lambda_{se} \rightarrow \text{inalterados}$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_n + \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n - \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e \quad (D.2)$$

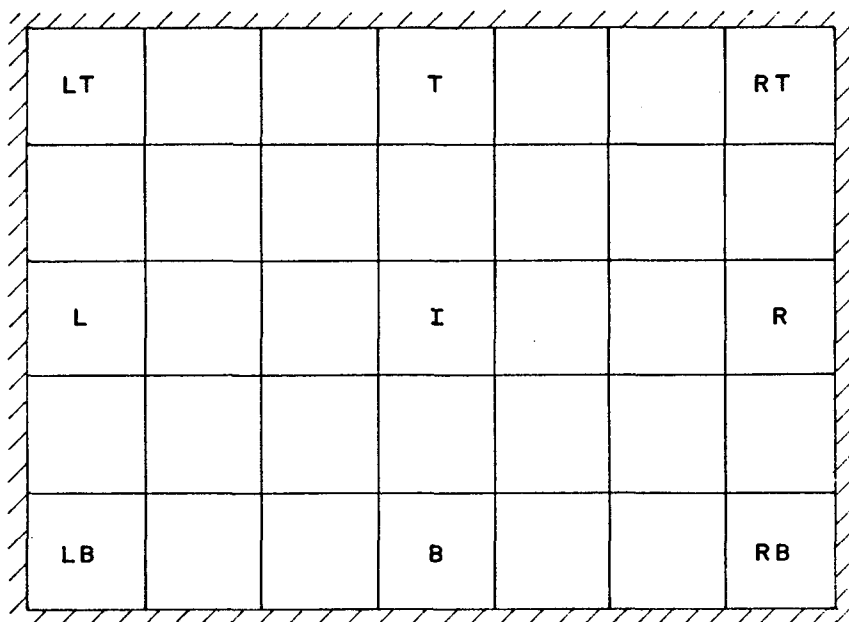


Figura D.1 - Os 9 tipos de volume de controle para a continuidade.

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e \quad (D.3)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_V)_s - (K_V)_n, \quad (D.4)$$

onde

$$K_V = \frac{\Delta P_w \beta}{2A_p V}, \quad (D.5)$$

com ΔP_w representando o gradiente de pressão na parede (ver Equação (6.37)).

B - ELEMENTO B

$$A_s = A_{sw} = A_{se} = 0$$

$$A_n, A_{nw}, A_{nc} \rightarrow \text{Inalterados}$$

$$A_e = \left(\frac{\alpha}{A_P}\right)_e + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_e - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_n \quad (D.6)$$

$$A_w = \left(\frac{\alpha}{A_P}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_w + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_n \quad (D.7)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_U)_w - (K_U)_e, \quad (D.8)$$

onde

$$K_U = \frac{\Delta P_w \beta}{2A_P}. \quad (D.9)$$

C - ELEMENTO T

$$A_n = A_{ne} = A_{nw} = 0$$

$$A_s, A_{se}, A_{sw} = 0$$

$$A_e = \left(\frac{\alpha}{A_P}\right)_e + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_e \quad (D.10)$$

$$A_w = \left(\frac{\alpha}{A_P}\right)_e - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_w \quad (D.11)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_U)_w - (K_U)_e. \quad (D.12)$$

D - ELEMENTO LB

$$A_s = A_{se} = A_{sw} = A_w = A_{nw} = 0$$

$$A_{ne} \rightarrow \text{Inalterado}$$

$$A_e = \left(\frac{\alpha}{A_P}\right)_e + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_e - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_n \quad (D.13)$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_P}\right)_n + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_n - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_e \quad (D.14)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} - (K_U)_e - (K_V)_n \quad . \quad (D.15)$$

E - ELEMENTO LT

$$A_n = A_{ne} = A_{nw} = A_w = A_{sw} = 0$$

$$A_{se} \rightarrow \text{Inalterado}$$

$$A_e = \left(\frac{\alpha}{A_P}\right)_e + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_e \quad (D.16)$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_P}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_e \quad (D.17)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_U)_w - (K_V)_s \quad . \quad (D.18)$$

F - ELEMENTO RB

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = A_s = A_{sw} = 0$$

$$A_{nw} \rightarrow \text{Inalterado}$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_P}\right)_n + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_n \quad (D.19)$$

$$A_w = \left(\frac{\alpha}{A_P}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_w + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right)_n \quad (D.20)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_U)_w - (K_V)_n \quad . \quad (D.21)$$

G - ELEMENTO RT

$$A_e = A_{se} = A_{ne} = A_n = A_{nw} = 0$$

$$A_{sw} \rightarrow \text{Inalterado}$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_P U}\right)_w + \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_s \quad (D.22)$$

$$A_w = \left(\frac{\alpha}{A_P U}\right)_w + \left(\frac{\beta}{4A_P U}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_s \quad (D.23)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_U)_w + (K_V)_s \quad (D.24)$$

H - ELEMENTO R

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = 0$$

$$A_w, A_{nw}, A_{sw} \rightarrow \text{Inalterados}$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_n + \left(\frac{\beta}{4A_P U}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_n \quad (D.25)$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_P U}\right)_w + \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_s \quad (D.26)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_V)_s - (K_V)_n \quad (D.27)$$

D.3 - SUMÁRIO

Neste apêndice apresentou-se todos os coeficientes para a equação de pressão obtidos para os volumes de controle para continuidade localizados nas fronteiras. Os respectivos termos fonte também foram relacionados. O problema da aplicação das condições de contorno para pressão foi automaticamente resolvido no processo de obtenção dos coeficientes.

APÊNDICE E

CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

E.1 - INTRODUÇÃO

A técnica de pontos fictícios, como já mencionado no Capítulo 6, não é utilizada para a consideração das condições de contorno para a equação de energia. Em vez disso, as condições de contorno são consideradas através de balanços de energia nos volumes de controle para a energia (que coincidam com aqueles para a continuidade) localizados nas fronteiras. Como já é sabido, a preocupação presente está voltada para a solução do problema de cavidades que apresentam temperaturas prescritas em duas fronteiras opostas, e fluxo de calor nulo especificado nas outras duas, considerando sempre domínios simplesmente conexos à 4 fronteiras.

Esse apêndice é dedicado à apresentação de todas as equações específicas para cada volume de controle de energia localizado nas fronteiras. Além da equação de energia genérica para os elementos de controle internos, são necessárias 8 equações adicionais para a consideração de todas as fronteiras do domínio. A Figura D.1 mostra os 9 tipos de volume de controle possíveis. A Equação (5.38) de conservação de energia é válida para todos os elementos internos, tipo I. As equações adicionais são encontradas fazendo-se balanços de energia sobre os volumes de controle da fronteira. Nesse procedimento, considera-se apenas fluxos difusivos de calor através dos contornos, pois tendo-se assumido condições de fluxos de massa nulos, não há transmissão de calor por convecção através das fronteiras.

Por questão de convenção, fixa-se as condições de temperatura prescrita nas fronteiras esquerda e direita do domínio transformado, ficando as condições de derivada nula especificadas sobre as fronteiras inferior e superior.

As equações suplementares, com seus respectivos termos fonte são a seguir relacionados.

E.2 - EQUAÇÕES ADICIONAIS

A - ELEMENTO L

$$A_P T_P^{n+1} = A_S T_S^{n+1} + A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STB \quad (E.1)$$

onde

$$STB = -C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n + C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e - \\ [C_{1\frac{\partial T}{\partial \xi}} + C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}}]_w + \frac{A_P T_P^n}{(1+E)} \quad (E.2)$$

B - ELEMENTO R

$$A_P T_P^{n+1} = A_W T_W^{n+1} + A_S T_S^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STB \quad , \quad (E.3)$$

onde

$$STB = -C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n - C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w + \\ [C_{1\frac{\partial T}{\partial \xi}} + C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}}]_e + \frac{A_P T_P^n}{(1+E)} \quad (E.4)$$

C - ELEMENTO T

$$A_P T_P^{n+1} = A_W T_W^{n+1} + A_S T_S^{n+1} + A_e T_E^{n+1} + STB \quad , \quad (E.5)$$

onde

$$STB = -C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w + C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e - C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s + \frac{A_P T_P^n}{(1+E)} \quad (E.6)$$

D - ELEMENTO B

$$A_P T_P^{n+1} = A_W T_W^{n+1} + A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STB \quad , \quad (E.7)$$

onde

$$STB = -C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w + C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n + \frac{A_P T_P^n}{(1+E)} \quad (E.8)$$

E - ELEMENTO LB

$$A_P T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STB \quad , \quad (E.9)$$

onde

$$STB = - \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_n + \frac{A_P T_P^n}{(1+E)} \quad . \quad (E.10)$$

F - ELEMENTO LT

$$A_P T_P^{n+1} = A_s T_S^{n+1} + A_e T_E^{n+1} + STB \quad , \quad (E.11)$$

onde

$$STB = - \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e - C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_s + \frac{A_P T_P^n}{(1+E)} \quad . \quad (E.12)$$

G - ELEMENTO RT

$$A_P T_P^{n+1} = A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STB \quad , \quad (E.13)$$

onde

$$STB = \left[C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e - C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_s - C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w + \frac{A_P T_P^n}{(1+E)} \quad (E.14)$$

H - ELEMENTO RB

$$A_P T_P^{n+1} = A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STB \quad , \quad (E.15)$$

onde

$$STB = [C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}]_e + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi})_n - C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta})_w + \frac{A_P T_P^n}{(1+E)} \quad (E.16)$$

Estas equações, a exemplo da Equação (5.38) para os volumes de controle internos, são resolvidas implicitamente. Todas as derivadas que aparecem nas expressões dos termos fonte são aproximadas em diferenças centrais, exceto aquelas para as quais esse procedimento se torna impraticável. Para a fronteira superior, por exemplo, é o caso da derivada $\frac{\partial T}{\partial \eta})_3$; para a fronteira esquerda são as derivadas $\frac{\partial T}{\partial \xi})_5$ e $\frac{\partial T}{\partial \xi})_6$. Os pontos 3, 5 e 6 estão representados na Figura E.1.

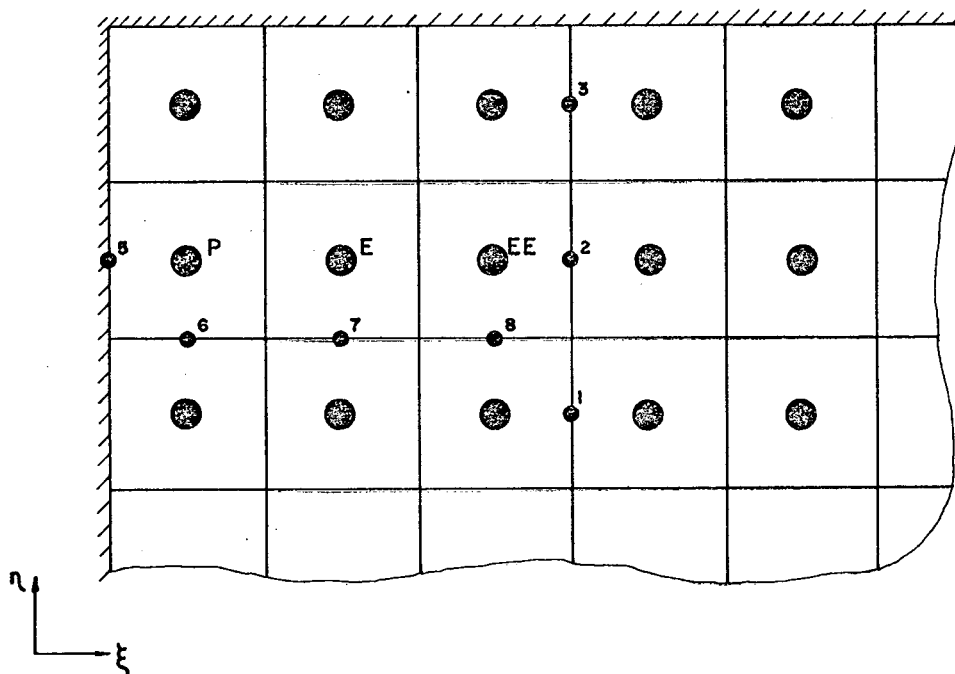


Figura E.1 - Cálculos de $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ na fronteira superior e $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ na fronteira esquerda.

E.3 - GRADIENTES DE TEMPERATURA NAS PAREDES

Os gradientes de temperatura devem ser determinados nos pontos 3, 5 e 6 da Figura E.1, para aplicação nos termos fonte das equações adicionais. A utilização das aproximações parabólicas já consideradas para avaliar gradientes de pressão no Capítulo 6, é

aqui simplesmente repetida para o caso dos gradientes de temperatura. Enfatiza-se que essa aproximação é consistente com as aproximações em diferenças centrais usadas para avaliar gradientes de temperatura para os volumes de controle internos ao domínio. Já que no arranjo de grade utilizado os pontos de pressão e temperatura coincidem, o gradiente em 3 é determinado pelas Equações (6.36) e (6.37). Escrevendo-as para temperaturas, resulta

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_3 = \frac{1}{2}(3T_3 + T_1 - 4T_2) \quad . \quad (E.17)$$

Expressão semelhante é válida para o ponto 6, bem como para as demais fronteiras. O gradiente em 5 é obtido de maneira similar, utilizando as temperaturas dos pontos P e E, além da temperatura de fronteira especificada no próprio ponto 5. A expressão resultante é

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_5 = \frac{1}{3}(9T_P - 8T_5 - T_E) \quad (E.18)$$

Expressão similar é válida para a fronteira direita.

Note-se que as condições de contorno de temperatura prescrita estão inseridas nos termos fonte das equações de fronteira unicamente através de gradientes como o da Equação (E.18). Isso impõe a necessidade de uma avaliação precisa destes gradientes, o que é conseguido pelas aproximações parabólicas consideradas.

E.4 - SUMÁRIO

Nesse apêndice apresentou-se as equações de conservação de energia válidas para os volumes de controle situados nas fronteiras. Tais equações foram obtidas através de balanços de energia. Os termos fonte das equações foram também relacionados, e evidenciou-se o fato de que as condições de contorno para a temperatura encontram-se inseridas nestes termos. Obteve-se ainda as aproximações parabólicas para os gradientes térmicos de fronteira, os quais estão incluídos nos termos fonte.